TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

HANNA SARIKKA

KIELENTÄMINEN MATEMATIIKAN OPETUKSEN JA OPPIMISEN TUKENA

Diplomityö

Tarkastajat:
Dosentti Jorma Joutsenlahti
Professori Seppo Pohjolainen

Aihe ja tarkastajat hyväksytty
luonnontieteiden tiedekunnan tiede-
kuntaneuvoston kokouksessa
5.3.2014

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
SARIKKA, HANNA: Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena
Diplomityö, 66 sivua, 22 liitesivua
Maaliskuu 2014
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Dosentti Jorma Joutsenlahti ja professori Seppo Pohjolainen
Avainsanat: Kielentäminen, oppimisstrategiat, matematiikan kieli

Kielentäminen eli matemaattisen ajattelun ilmaiseminen kielen avulla pääsääntöisesti suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti, 2010) on työkalu matematiikan opetukseen ja oppimiseen. Tässä diplomityössä on tutkittu kielentämisen teoriapohjaa, Jorma Joutsenlahden kehittämiä kielentämismalleja, kehitetty uusia kielentämistehtävätyyppejä sekä tutkittu kielentämiskokeilun avulla opiskelijoiden suhtautumista kielentämistehtäviin. Tutkimus toteutettiin Tampereen teknillisessä yliopistossa ja Turun yliopistossa sekä pienemmässä mittakaavassa Tampereen yliopiston normaalikoulussa. Tutkimukseen osallistui yhteensä 163 yliopisto-opiskelijaa sekä 21 lukion lyhyen matematiikan oppilasta. Tampereella tutkimusta tehtiin yhdellä insinöörimatematiikan kurssilla ja Turussa analyysin kurssilla. Opiskelijoille annettiin viikoittain kielentämistehtäviä ja kurssin loppupuolella opiskelijoille jaettiin kysely, jossa he saivat kertoa omia näkemyksiään matematiikasta, kielentämisestä ja kielentämistehtävistä. Tutkimuksessa haluttiin vastata seuraaviin kysymyksiin: Millaisia kielentämistehtävämalleja voidaan kehittää? Millaiset kielentämistehtävät ovat toimivia? Mitä mieltä opiskelijat ovat kielentämisestä ja kielentämistehtävistä? Miten kielentämistä voi hyödyntää matematiikan opetuksessa ja oppimisessa? Tutkimusta varten kehitetyt uudet tehtävämallit osoittautuivat toimiviksi. Kokonaisuudessaan tulokset olivat positiivisia ja kannustivat jatkamaan kielentämisen käyttämistä matematiikan opetuksessa.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Degree Programme in Science and Engineering
SARIKKA, HANNA: Languaging as a tool in learning and teaching mathematics
Master of Science Thesis, 66 pages, 22 Appendix pages
March 2014
Major: Mathematics
Examiners: Docent Jorma Joutsenlahti and PhD Seppo Pohjolainen
Keywords: Languaging, language and mathematics,

Languaging which means expressing one's mathematical thoughts through speech and writing (Joutsenlahti, 2010) is a tool in teaching and learning mathematics. In this master's thesis the focus is on the theory of languaging and the languaging models by Jorma Joutsenlahti, developing of new languaging exercises and surveying the student's opinions on languaging. The study was organized at Tampere University of Technology and the University of Turku and on a smaller scale at a high school in Tampere (Tampereen yliopiston normaalikoulu). 163 university students and 21 high school students took part in the study. In the Tampere University of Technology the study was organized in an engineering course and in The University of Turku in an analysis course. The students were given a languaging exercise each week an in the end of the course they were given a questionnaire about mathematics, languaging and languaging exercises. The following questions were answered in this master's thesis: What kind of languaging exercises can be developed? What kind of languaging exercises work? What do the students think about languaging and languaging exercises? How can languaging be useful in teaching and learning mathematics? The results were positive and they encourage us to keep on using languaging in teaching mathematics.

ALKUSANAT

Tämän diplomityön valmistuminen on ollut suuri projekti ja valtava työ opiskelijan urallani, mutta viimeinkin tämäkin vuori on valloitettu. Tahdon kiittää yhteistyöstä Jussi Kangasta Tampereen teknillisestä yliopistosta sekä Petteri Harjulehtoa Turun yliopistosta. Erityisesti haluan kiittää ohjaajaani Jorma Joutsenlahtea, joka kärsivällisesti jaksoi ohjata minua työni eri vaiheissa ja teki diplomityön tekemisestä innostavaa ja haastavaa. Lyhyestä virsi kaunis: lämmin kiitos kaikille!

SISÄLLYS

JOHDANTO

Tunnetusti Suomi on matemaattisen opetuksen huippumaita – ainakin, jos uskotaan Pisa-tutkimuksia (Lavonen, 2008). Viimeaikoina on kuitenkin huomattu, että suomalaisten koululaisten matematiikan taitojen taso on laskenut. Syyksi tähän on spekuloitu useita asioita; esimerkiksi matematiikan opetuksen luonteen muuttuminen soveltavammaksi. Mekaanista laskutaitoa ei enää vaadita opiskelijoilta perinteisellä tasolla; ylioppilaskokeissa saa olla esimerkiksi symbolinen laskin ja kokeiden tehtäviä on kehitetty soveltavampaan suuntaan. Tietotekniikan aikakautena työmaailma asettaa opetukselle uusia vaatimuksia. Näihin uusiin vaatimuksiin on vastattu muun muassa kehittämällä opetusta ongelmapainotteisemmaksi. Kuitenkin edelleen matematiikka mielletään oppiaineeksi, jossa opetellaan matematiikan sääntöjä ja kaavoja ulkoa ja harjoitellaan niiden käyttämistä harjoitustehtävien avulla.

Tekniikan osaajille on nykyaikana kysyntää. Teknillisissä yliopistoissa on huomattu, että siellä aloittavilla opiskelijoilla on vaikeuksia pakollisten matematiikan kurssien suorittamisessa (Pohjolainen et al, 2007). Yliopistossa opiskeltavan matematiikan vaikeutta voidaan selittää esimerkiksi matematiikkakuilun avulla. Joillakin opiskelijoilla matematiikan kurssit jäävät suorittamatta roikkumaan ja voivat jopa olla esteenä valmistumiselle. Siksi on tärkeää tutkia ja kehittää matematiikan opetusta siten, että otetaan huomioon myös nämä opiskelijat.

Matematiikan voidaan ajatella olevan oma kielensä, joka koostuu matematiikan symbolikielestä, kuviokielestä ja luonnollisesta kielestä. Näin ollen matematiikkaa opeteltaessa opetellaan tavallaan uutta kieltä. Toisille matematiikan kieli voi tulla luonnostaan. Henkilöiden, joille matematiikan kieli on helppoa ja luonnollista, ajatellaan olevan matemaattisesti lahjakkaita, eikä heille ole välttämättä hyötyä harjoitella matematiikan kieltä samalla tavalla kuin muiden. Toisille matematiikka puolestaan on kokoelma käsittämättömiä symboleita ja merkkejä. He joutuvat ponnistelemaan matematiikan ymmärtämisessä enemmän kuin edelliset.

Tässä diplomityössä on tutkittu kielentämistehtävien toimivuutta Tampereen teknillisessä yliopistossa, Turun yliopistossa ja Tampereen normaalikoulussa. Tässä on haluttu kehittää kielentämistehtävämalleja ja testata niiden toimivuutta. Myös opiskelijoiden näkemyksiä kielentämistehtävistä on kartoitettu kyselylomakkeen avulla. Tutkimuskysymyksinäni olivat:

1. Millaisia kielentämistehtävämalleja voidaan kehittää?
2. Millaiset kielentämistehtävät ovat toimivia?
3. Mitä mieltä opiskelijat ovat kielentämisestä ja kielentämistehtävistä?
4. Miten kielentämistä voi hyödyntää matematiikan opetuksessa ja oppimisessa?

1 MATEMATIIKAN OPISKELU

Yliopistomatematiikan on huomattu olevan vaikeaa teknillisissä yliopistoissa (Pohjolainen et al, 2007). Oppiminen voidaan määritellä esimerkiksi interaktiiviseksi prosessiksi, jossa oppija muuttaa kokemuksiaan siten, että hänen tiedoissaan ja taidoissaan tapahtuu pysyviä muutoksia. Oppiminen sisältää oppimisprosessin ja sen tulokset; muutoksen oppijan tiedoissa, taidoissa ja asenteissa sekä vuorovaikutusta. (Verkkotutor)

Yliopistokoulutuksen tavoite on antaa tarvittavat tiedot ja taidot tieteellisen tutkimuksen tekoon ja tuottaa asiantuntijoita yhteiskunnan tarpeeseen. Yliopistotutkinnon suorittaneen henkilön ei ainoastaan oleteta käyttävän tietoa tutkimukseen, vaan hänen tulisi myös pystyä käyttämään ja soveltamaan saamaansa koulutusta muutoksissa ja uusissa tilanteissa. Halutaan siis kouluttaa henkilöitä, jotka oppivat kouluttamaan itse itseään. Tiedon omaksumisen lisäksi opiskelijoille tulisi siis opettaa keinoja omaksua uusia asioita. (Jokinen, 2002.)

Hyvällä opetuksella halutaan saavuttaa hyvää oppimista. Tämä sisältää hyvin rakentuneen tietämyskannan, tarkoituksenmukaisia motivoivia asiayhteyksiä, oppijan aktiivisuuden ja interaktiivisuuden muiden kanssa sekä itsetarkkailun. Ensimmäiset kaksi kohtaa ovat sekä hyvän oppimisen edellytyksiä että saavutuksia. Halu tietää enemmän syntyy jo valmiiksi laajasta tietämyksestä. Mitä paremmin on oppinut jonkun asian, sitä paremmin siitä oppii lisää. (Biggs, 1999.)

Oppimiseen vaikuttavia tekijöitä on paljon. Yliopiston näkökulmasta tärkeitä seikkoja ovat muun muassa tilat, työvälineet, opetuksen laatu ja opiskelijamassa. Opiskelijan kannalta tärkein seikka on motivaatio opiskeluun. Jossain määrin siihen voidaan vaikuttaa sekä positiivisella että negatiivisella tavalla. Motivaatioon negatiivisella tavalla vaikuttaminen tarkoittaa negatiivisten oppimiskokemusten tarjoamista ja positiivinen vaikuttaminen vastaavasti positiivisten oppimiskokemusten tarjoamista opiskelijalle. Motivaatiosta kerrotaan lisää tämän luvun viimeisessä kappaleessa.

Tässä luvussa tutustutaan oppimiseen käsitteenä Bloomin taksonomian avulla. Lisäksi pohditaan, miksi matematiikka on vaikeaa opiskelijoille. Yhtenä alaotsikkona on opetussuunnitelma; mitä vaatimuksia matematiikalle on lukion pitkän ja lyhyen matematiikan opetussuunnitelmissa? Vaikka teknillisille aloille hakeutuvia pidetään yleisesti matemaattisesti lahjakkaina, ovat nykyään monet teknillisten yliopistojen opiskelijat lukiotasoltaan lyhyen matematiikan oppilaita. Siksi tässä kappaleessa on tutustuttu molempiin opetussuunnitelmiin. Etenkin keskitytään matematiikan kielen painotukseen opetussuunnitelmassa.

1.1 Mitä tarkoittaa oppiminen – Bloomin taksonomia

Kun puhutaan opettamisesta ja oppimisesta sekä niiden kehittämisestä, on hyvä miettiä, mitä oppiminen yleensäkin on. Sivistyssanakirja määrittelee oppimisen kolmella tavalla:

1) tiedonhankinnan tai taidonhankinnan toiminta, prosessi tai kokemus
2) opiskelun tai opetuksen kautta saatu tieto tai taito
3) kokemuksen tai ehdollistumisen kautta tapahtunut käyttäytymisen muutos

(The Free Dictionary)

Benjamin Bloom kehitti 1950-luvulla taksonomian määrittämään osaamisen tason. Tämä alkuperäinen Bloomin taksonomia jaottelee osaamisen kuuteen tasoon: tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analysoiminen, syntetisoiminen ja arvioiminen (evaluoiminen). Bloom lisäksi jakoi oppimisen kognitiiviseen, taidolliseen ja tunneperäiseen alueeseen. 1990-luvulla Bloomin eräs oppilas, Lorin Anderson, kehitti taksonomiaa seuraavanlaiseksi:

1) Muistaminen: termien ja tiedon muistaminen ja tunnistaminen
2) Ymmärtäminen: suullisen, kirjallisen ja kuvallisen ymmärryksen kehittäminen
3) Soveltaminen: opitun asian käyttäminen
4) Analysoiminen: asian rikkominen ainesosikseen ja osien toiminnan ymmärtäminen
5) Arvioiminen (evaluoiminen): kriittinen ajattelu ja johtopäätösten tekeminen
6) Luominen: opittujen asioiden yhdistäminen uudeksi kokonaisuudeksi

(Forehand, 2012)

Lavonen ja Meisalo kuvaavat oppimista prosessiksi, jossa oppilas konstruoi käsitteitä ja periaatteita. Nämä rakentuvat aikaisempien tietojen ja tietorakenteiden varaan. Oppiminen on siis konstruktiivista ja kumulatiivista. Se on lisäksi käsitteiden liittämistä oppilaan omaan tietorakenteeseen ja kieleen. Opiskelu puolestaan on tavoitteista toimintaa, johon oppilaalla itsellään on suuri vaikutus. Mitkä asiat sitten vaikuttavat oppimiseen? Ensinnäkin voidaan miettiä, millaista oppimista tavoitellaan. Halutaanko, että opiskelija läpäisee kurssin opettelemalla asioita paljon ulkoa, vai pyritäänkö siihen, että opiskelija sisäistää asioita ja muistaa ne vielä myöhemminkin? Näistä ensimmäistä kutsutaan pintaoppimiseksi ja jälkimmäistä syvälliseksi oppimiseksi. Syvällinen oppiminen on tehokkaampaa ja pitkäkestoisempaa, ja siihen toivotaan opiskelijoidenkin pyrkivän etenkin yliopistotasolla. Se, mitä opitaan, on tärkeämpää kuin opittujen asioiden määrä. Pintaoppijat eivät yleensä ole yhtä motivoituneita opiskeltavasta alasta, eivätkä näin ollen ole kiinnostuneita muuta kuin läpäisemään kurssin. Tähän riittää viimeisen illan pänttääminen. Syväoppiminen on merkityspohjaista oppimista; uudet asiat rakentuvat vanhojen päälle. Syvällinen oppija on kiinnostunut opiskeltavasta aiheesta. Hän on halukas oppimaan siitä lisää ja hän näkee vaivaa sen eteen. Hänen ei tarvitse hakea ulkoisia motivaationlähteitä, kuten arvosanoja tai opettajan tunnustusta, opiskeluunsa. Kun asia on sisäistetty, sitä on helppo soveltaa muissa yhteyksissä. (Lavonen, Meisalo et al)

Matematiikan oppimisen ja opettamisen kannalta edellä esitetyt kuusi oppimisen tasoa voidaan ajatella seuraavalla tavalla: tasot yksi ja kaksi eli muistaminen ja ymmärtäminen voidaan saavuttaa tavallisten ”perusmatematiikan tehtävien” avulla, joissa oppija mekaanisesti laskee tehtäviä esimerkin mukaan. Sanalliset tehtävät ja ongelmanratkaisuharjoitukset voivat auttaa pääsemään seuraaville tasoille kolme, neljä ja viisi. Kielentämistehtävät puolestaan tukevat tasoja kaksi, kolme, neljä ja viisi, sillä ne pyrkivät lisäämään ymmärrystä, tukevat soveltamistaitoja, vaativat oppijalta analysoimista ja saattavat pohjautua oppijan arviointitaitoihin. Tasolle kuusi pääseminen on pitkällisen opiskelun tulos, johon monet eivät pääse.

1.2 Miksi matematiikka on vaikeaa?

Siirtymistä lukiomatematiikasta yliopistomatematiikkaan voidaan kuvata siirtymisenä empiirisestä matematiikasta abstraktiin matematiikkaan – epämuodollisesta muodolliseen. Voidaan ajatella, että opiskelijoiden on opittava täysin uusi tapa ajatella ja toimia matematiikassa. Monet opiskelijat saattavat ajatella yliopistomatematiikan olevan vain lukiomatematiikan syventämistä, jolloin he eivät odota sitä tarkkuuden ja vaikeuden tasoa, jolla yliopistomatematiikka on. Aiemmin opetetut asiat eivät enää kohtaakaan niitä, joita nyt opiskellaan. (Hoyles, Newman, Noss, 2001.)

Matemaattisen ajattelutaidon puute, heikot laskentotaidot ja huono asenne matematiikassa voidaan mainita suurina ongelmakohtina opiskelijoilla, jotka aloittavat yliopistomatematiikan (Hoyles et al 2001). Monilla opiskelijoilla on heikot matematiikan perustaidot jo yliopistoon tullessaan.. Heillä voi olla huonoja kokemuksia matematiikan opiskelusta, negatiivisia tunteita matematiikkaa kohtaan, huono asenne ja uskomukset sekä koepelkoa ja matematiikkapelkoa. Oppimiseen vaikuttavat myös huono itsetunto ja tehottomuus. (Väisänen, Rautopuro, Ylönen, 2004.)

Ymmärryksen puute matematiikan oppitunnilla voi aiheuttaa opiskelijalle heti alussa motivaation romahduksen. Kun hän ei kysymyksistään huolimatta saa apua opettajilta, voi opiskelija tuntea pettymystä itseensä, opettajaansa ja lopulta opetettavaan aineeseen. Useat epäonnistumisen tunteet ja negatiivinen käsitys omasta matematiikan osaamisesta voivat johtaa opiskelijan turhautumiseen ja kiinnostuksen menettämiseen sekä pahimmassa tapauksessa kurssin keskeyttämiseen. (Väisänen, Ylönen, 2004.)

Epäonnistumisen tunnetta lisää se, kun opiskelija kokee olevansa ainoa epäonnistuja luokassa. Suuret ryhmäkoot ja tasoryhmien puuttuminen voivat johtaa siihen tunteeseen, ettei heikompi opiskelija voi pärjätä matematiikan opinnoissa. Heikommin menestyvä opiskelija ei välttämättä uskalla esittää kaikkia kysymyksiään luokan edessä, jos hän tuntee olevansa ainoa, kuka koskaan esittää kysymyksiä. Etenkin lukion lyhyen matematiikan oppimäärän opiskelleet voivat helposti tuntea yliopiston matematiikan kurssit liian vaikeiksi. (Hoyles et al 2001.)

Asenne matematiikkaa kohtaan on myös tärkeä oppimismenestyksessä. Sellaiset opiskelijat, joilla on myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan ja positiivinen kuva itsestään matematiikan osaajana, menestyvät keskimäärin paremmin kuin sellaiset, joilla on negatiivinen kuva taidoistaan ja opetettavasta aineesta (Väisänen, Ylönen, 2004). Ajatukset matematiikan hyödyllisyydestä tai merkityksestä vaikuttavat myös opiskelijan menestymiseen. Opiskelija, joka uskoo matematiikasta olevan hyötyä muissa opinnoissa, on selvästi motivoituneempi näkemään vaivaa sen eteen.

Eräs mielenkiintoinen näkökulma tähän aihepiiriin liittyen on, että matematiikan opettajat ovat yksinomaan sellaisia, jotka ovat opiskelleet ja mahdollisesti myös tutkineet matematiikkaa omana tieteenalanaan. Suurin osa opiskelijoista ei kuitenkaan ole kiinnostunut matematiikasta tieteenä vaan lähinnä työkaluna muissa tieteissä. Tämä kiinnostusten ja näkökulmien ero voi olla osana opiskelijoiden turhautumista. Opettaja ei osaa katsoa opetettavaa ainettaan opiskelijaa kiinnostavalta näkökannalta. (Hoyles et al 2005.)

Tavoitteena on kannustaa opiskelijoita itsenäiseen ja tehokkaaseen opiskeluun. Oppimiseen vaikuttavia asioita on paljon. Hyvät tilat, kiinnostava kurssitarjonta, vertaisopiskelijat sekä opetus ilmoitetaan usein listan kärjessä, kun kysytään oppilaitoksen vaikutusmahdollisuuksia (Kember, Leung, 2004). On haastavaa järjestää opetus siten, että se on mahdollisimman tehokasta, sillä opiskelijoiden menestys on tärkeää paitsi opiskelijoille itselleen, myös oppilaitoksille. (Kuh, 2005.)

Kun opiskelija siirtyy lukiosta yliopistoon opiskelemaan matematiikkaa, voi muutos tuntua hyvinkin suurelta. Opetustavat ja –tavoitteet voivat tuntua erilaisilta kuin ne, joihin lukiossa totuttiin. Yliopistossa opiskelijan pitää oppia muun muassa todistamaan matematiikan lauseita ja johtamaan itse kaavoja. Mekaaninen laskeminen, johon matematiikka usein rinnastetaan, jätetäänkin laskentaohjelmistojen harteille. Ei riitä, että oppii helposti algoritmeja tehtävien ratkaisemiseksi, vaan on ymmärrettävä matematiikan perimmäinen luonne ja saatava kiinni matematiikan abstraktimmasta puolesta.

Lukiomatematiikan ja yliopistomatematiikan välistä eroa voidaan kutsua matematiikkakuiluksi. Tämän kuilun ylittämiseksi on muun muassa kehitetty lukuisia siltakursseja, joihin aloittava opiskelija voi osallistua. Tampereen teknillisessä yliopistossa on esimerkiksi perustaitotesti ja siihen liittyvä matematiikkajumppa, jotka mittaavat ja kertaavat tarvittavia lukio-oppeja. Lisäksi monet yliopistot tarjoavat valinnaisia matematiikan johdantokursseja uusille opiskelijoille. Myös lukiolaisille on tarjolla matematiikan opintoihin suuntaavia valmennuskursseja.

1.3 Opetussuunnitelma

Tässä kappaleessa esitellään matematiikan opetussuunnitelma yläasteen ja lukion osalta. Yläasteen matematiikan oppimistavoitteista sanottiin seuraavaa:

”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään

ratkaisuja niihin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti − se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta.

Matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti, ja sen tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään. Arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia, joita on mahdollista ratkoa matemaattisen ajattelun tai toiminnan avulla, tulee hyödyntää tehokkaasti. Tieto- ja viestintätekniikkaa tulee käyttää oppilaan oppimisprosessin tukemisessa.”

(Opetushallitus, 2013)

Lukion opetussuunnitelmassa oli pitkän ja lyhyen matematiikan opetustavoitteet erikseen. Opetuksen tehtävät lyhyelle ja pitkälle matematiikalle olivat seuraavat:

> *”Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävänä on tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa.”*
>
> *”Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.”*

Lyhyelle matematiikalle annettiin seuraavat opetuksen tavoitteet:

> *”Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija*
>
> - *osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä*
> - *saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen*
> - *hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille*
> - *sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä*

- *saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta*
- *harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatioita ja arvioimaan sen luotettavuutta*
- *tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä*
- *oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna."*

Pitkän matematiikan oppimistavoitteet ovat tämän diplomityön kannalta kiinnostavimmat:

"Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- *tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa*
- *rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin*
- ***ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä***
- *oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena*
- *kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan*
- *harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.*
- *harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita*
- *osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä."*

(Opetushallitus, 2013)

Opetussuunnitelmassa siis ensinnäkin halutaan, että oppilas oppii ja ymmärtää matematiikan luonteen ja sen käyttötarkoitukset. Ei haluta, että oppilaat vain opettelevat ulkoa laskusääntöjä ja kertotauluja, vaan halutaan, että oppilas oppii käyttämään ja soveltamaan oppimaansa. Tätä varten on haluttu kehittää matematiikan opetusta soveltavampaan ja muun muassa ongelmaperustaisempaan suuntaan. Tällä tavalla on haluttu vastata kasvaviin työelämälähtöisiin tarpeisiin koulutuksen osalta.

Toiseksi voidaan huomata, että opetussuunnitelmassa matematiikkaa luonnehditaan kieleksi, jota oppilaan pitää oppia lukemaan ja kirjoittamaan. Matematiikan kieliaspektiin palataan kappaleessa 4.

1.4 Motivaation vaikutus oppimiseen

Motivaatio on määritelty sisäiseksi tilaksi, joka saa aikaan, ohjaa ja pitää yllä toimintaa. Motivaatiota voidaan luonnehtia eri tavoin. Se voidaan jakaa lähestymis- ja välttämismotiiveihin, persoonallisuuden piirteeksi ja tilaksi, sisäiseksi ja ulkoiseksi motivaatioksi. Kun puhutaan motivaatiosta, voidaan miettiä yksilön tavoitteita, uskomista omiin mahdollisuuksiin tehdä jotakin ja tuntemusten virittämistä. Motivaatiolla on ennen vastattu siihen, miksi jotkut ihmiset kiinnostuvat joistakin aiheista. Sittemmin on haluttu vastaus siihen, miksi ihmiset käyttävät eri oppimis- ja suoritustilanteissa eri tapoja toimia ja miten he säätelevät ponnistelujaan suoritusten ajan. (Lehtinen, Kuusinen, Vauras, 2007.)

Motivaatioon vaikuttavat ympäristö, kiinnostukset sekä itsetunto. Ympäristöllä on etenkin nuorempiin opiskelijoihin suuri vaikutus. Vanhempien ja ystävien asenne saattaa lannistaa tai innostaa riippumatta omista intresseistä. Eniten huonoa motivaatiota selittävät kuitenkin toiminta ja tulkintatavat. (Lunti, 2009.)

Sisäiselle motivaatiolle on ominaista se, että opiskelija on sitoutunut johonkin tehtävään siksi, että siitä on hänelle jotakin hyötyä. Se on oppimisen halua, joka johtaa syvälliseen oppimiseen. Sisäisesti motivoituneelle opiskelijalle on palkitsevaa sitoutua annettuun tehtävään, ja hän tekee sen nimenomaan asian itsensä vuoksi. Sisäisen motivaation syntyyn vaikuttavat opettaja, tehtävien vaikeustaso ja haasteellisuus, niiden mielenkiintoisuus sekä ulkoinen palkitseminen. (Rask, 2010.)

Ulkoisen motivaation tunnusmerkkejä ovat palkitseminen tai rankaiseminen. Esimerkiksi kehut opettajalta voivat olla ulkoisen motivaation lähteenä. Ulkoiseen motivaatioon siis vaikuttaa opiskelijan ympäristö eikä niinkään hänen halunsa tehdä asioita niiden oman hyödyn takia. Jokin asia tehdään, jotta saavutetaan jotakin muuta. Arvosanat ovat selkeä ulkoisen motivaation lähde suurelle osalle opiskelijoista. (Rask, 2010.)

Opettajan merkitys opiskelijan motivaation kohottajana tai heikentäjänä on merkittävä. Etenkin sellaiselle opiskelijalle, joka on ulkoisesti motivoitunut, opettajan kannustus ja opetuskeinot ovat tärkeitä. Hyvä palaute voi kannustaa näkemään enemmän vaivaa, mutta negatiivinen palaute saattaa lannistaa täysin. Sisäisesti motivoituneelle opettajan palaute ei ole niin tärkeää, sillä motivaattorina toimii halu oppia. Siis niille opiskelijoille, joilla on suuremmat edellytykset oppia, opettajan opetuskeinoilla ei niinkään ole suurta merkitystä. Opettajan on siis huomioitava erityisesti ne oppilaat, joilla ei ole kiinnostusta aiheeseen ja jotka saattavat luonnostaan olla heikompia oppimaan opetettua asiaa. (Rask, 2010.)

Millainen motivaatio on opiskelunsa hyvin suorittavilla opiskelijoilla? Tätä voidaan kuvata syy ja seuraus ketjuna. Ensinnäkin sellaisilla opiskelijoilla, jotka saavuttavat hyviä oppimistuloksia ja joilla on hyvä akateeminen tausta, on itsenäinen (sisäinen) motivaatio. Heidän päättäväisyytensä opiskelujensuhteen lisäävät tätä motivaatiota. Motivaatio johtaa puolestaan parempiin opiskelutuloksiin. Itsenäiset (sisäisesti motivoituneet) opiskelijat lopettavat opiskelunsa kesken pienemmällä todennäköisyydellä kuin muut. (Fortier, Vallerand, Guay, 1995.)

2 ERILAISET OPPIJAT

Maailmassa lienee enemmän kuin kuusi miljardia erilaista tyyliä oppia. On tärkeää ottaa huomioon, että keino, jolla ”keskiverto” opiskelija oppii ja ymmärtää, ei toimikaan jollekin muulle henkilölle. Erilaisia oppijoita on luokiteltu monella tavalla ja oppimistyylistään kiinnostunut voi tehdä testejä, joilla hän saa selville oman oppimistyylinsä. Opettajan on tärkeää tiedostaa, että on erilaisia oppijoita ja oppija itse hyötyy tiedosta, miten hän parhaiten oppii. Tässä luvussa esitellään joitakin luokitteluja erilaisista oppijoista.

2.1 Visuaalinen, auditiivinen ja kinesteettinen oppija

Oppijat voidaan luokitella sen mukaan ovatko he visuaalisia, auditiivisia vai kinesteettisiä oppijoita. Visuaaliselle oppijalle on tärkeää pystyä hyödyntämään näköaistiaan, auditiivisen oppijan oppiminen perustuu kuuloaistiin ja kinesteettinen oppiminen perustuu tuntohavaintoihin, liikkeeseen ja kokemuksen kautta oppimiseen. Näiden lisäksi usein erotetaan vielä taktiilinen oppiminen, joka perustuu tuntoaistiin. Taktiilista oppimista ei usein eroteta kinesteettisestä oppimisesta. (Vainionpää, 2006)

Opetustilanteessa visuaalinen oppija arvostaa hyviä kalvoja, dioja ja monisteita. Hän muistaa helposti näkemänsä kuviot ja käyttääkin kuvioita oppimisensa tukena. Hän pystyy keskittymään hyvin ja hänellä on vilkas mielikuvitus. Hänelle värit, muodot ja esteettisyys ovat tärkeitä. Hänen kannaltaan opetuksessa on tärkeää, että voi nähdä opetuksen, tehdä omia muistiinpanoja ja kuvioita sekä käyttää kuvioita ja värejä.

Auditiivinen oppija oppii sanallisten ohjeiden avulla ja hän usein toistaa tai puhuu asiat mielessään. Hän hyötyy asioiden selittämisestä ja keskustelusta. Hänen oppimistaan saattaa häiritä muistiinpanojen tekeminen, sillä keskittymällä kuuntelemaan ja kyselemään hän oppii parhaiten. (Vainionpää, 2006)

Kinesteettinen oppija muistaa oppimaansa erilaisten tuntemusten ja kokemusten kautta. Hän hahmottaa ihmisten tarkoitukset eleiden, liikkeiden ja ilmeiden kautta. Hänen oppimistaan auttaa muistiinpanojen tekeminen ja esineiden käsittely. Hän tykkää tekemisestä ja kokeilusta sekä soveltamisesta. Hänen oppimistaan voi tukea erilaisilla peleillä, simulaatioilla ja vaikkapa draamalla. (Vainionpää, 2006)

2.2 Oppimisprofiilit

Erityyppiset oppijat voidaan luokitella esimerkiksi seuraavaan neljään luokkaan: kiinnostuneisiin, suorittajiin, jäljittelijöihin ja epäakateemisiin oppijoihin. Sisällöstä kiinnostuneet oppijat haluavat opiskella ja ymmärtää aihetta sen itsensä vuoksi. Suorittaja-oppijat haluavat hyviä tuloksia. He ottavat opettelevat vaaditut asiat hyvin suunniteltujen opiskelumetodien avulla hyvien arvosanojen takia. Jäljittelevät oppijat puolestaan pelkäävät epäonnistumista ja opettelevat asiat pinnallisesti. Epäakateemiset oppijat eivät ole kiinnostuneita opetettavasta aiheesta tai opiskelusta, ja heidän opiskelutapansa on epäjärjestelmällinen. (Baeten, Kyndt, Struyven, Dochy, 2010.)

Tampereen teknillisessä yliopistossa tehdyn tutkimuksen mukaan opiskelijat voidaan jakaa viiteen oppijaprofiilimalliin: tukea tarvitseviin, osaajiin, pintasuuntautuneisiin, vertaisoppijoihin ja omin päin opiskeleviin. TTY:n opiskelijoiden oppimisprofiilit määritetään opiskelujen alussa tehtävässä matematiikan perustaitojen testissä. Opiskelijoilta esitetään alla oleva kysymys, jonka perusteella heidät jaetaan edellä esitettyihin profiileihin.

Mikä alla olevista kuvauksista kuvaa parhaiten matematiikan oppimistasi? Lue ensin kaikki kuvaukset rauhassa ja valitse oppimisprofiili, joka on lähimpänä sinun oppimistasi.

1. profiili. *Kiinnostukseeni matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin oma mielenkiinto. Lasken tehtävän usein samalla tavalla kuin se on esitetty kirjassa tai tunnilla, enkä yleensä mieti omaa menetelmää tehtävän ratkaisemiseksi. Kykenen oppimaan matematiikkaa kopioimalla esimerkkiratkaisuja kunhan pidän ajatuksen mukana.*

2. profiili. *Opiskelen mielelläni matematiikkaa yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja laskiessani toivon, että saan neuvoa, jos en kykene itsenäisesti tehtävää ratkaisemaan. Kiinnitän huomiota esimerkkeihin ja koen, että matematiikan oppiminen on tarpeellista. Tehtäviä laskettaessa on mielestäni tärkeää saada oikea vastaus, vaikka joissakin kohdissa ratkaisua olisi virheitä. Pidän siitä, että yrittämisestä palkitaan.*

3. profiili. *Opiskellessani matematiikkaa haluan, että minua opastetaan henkilökohtaisesti vaikeissa kohdissa. Opettajan antamat esimerkit ja opetustapa vaikuttavat paljon siihen, miten omaksun asian. En mielelläni sovella malliratkaisuja uusiin tehtäviin. Jätän vaikeat tehtävät tekemättä tai kesken. Matematiikan "kieli" vaikuttaa minusta vaikealta.*

4. profiili. *Pystyn oppimaan matematiikkaa, jos koen tarvitsevani sitä. En laske tehtäviä mielelläni kavereiden kanssa, vaan opin parhaiten itsekseni pohtimalla. En myöskään tarvitse opettajan tukea oppimisessani. Laskutehtävien kopioiminen ei edistä oppimistani.*

5.profiili. *Haluan oppia matematiikkaa syvällisesti, enkä halua opetella asioita ulkoa. Laskiessani vaikeaa tehtävää en luovuta helpolla, vaan yritän ratkaista sen. Pärjään mielestäni hyvin matematiikassa.*

Pintasuuntautunut mallista oppija on opiskelija, jonka kiinnostukseen matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin mielenkiinto matematiikkaa kohtaan. Hän laskee tehtävät usein samalla tavalla kuin se on esimerkeissä, eikä mieti vaihtoehtoisia menetelmiä. Hän oppii matematiikkaa kopioimalla esimerkkejä ja malliratkaisuja ja opettelemalla ne ulkoa. **Vertaisoppija** opiskelee mielellään muiden kanssa. Hän haluaa mieluusti neuvoja, jos törmää laskiessaan ongelmiin. Hän kokee, että matematiikan oppiminen on tarpeellista. Laskiessaan hänestä on tärkeää saada oikea vastaus, vaikka ratkaisussa olisikin virhe. **Tukea tarvitseva** opiskelija haluaa henkilökohtaista apua opiskellessaan matematiikkaa. Opettajan antamilla esimerkeillä ja opetustavoilla on suuri merkitys hänen oppimiseensa. Hän ei oikein hallitse matematiikan soveltamista ja jättää usein vaikeat asiat kesken. Matematiikan kieli on hänelle vaikeaa. **Omin päin opiskeleva** pystyy oppimaan matematiikkaa, jos hänellä on riittävä syy siihen. Hän ei mielellään laske muiden opiskelijoiden kanssa – hän oppii parhaiten itse pohtimalla. Hän ei myöskään kaipaa opettajan apua. Laskutehtävien kopioimisesta ei hänelle ole paljonkaan hyötyä. **Osaaja** haluaa oppia matematiikkaa syvällisesti vain matematiikan itsensä takia. Hän ei halua opetella asioita ulkoa, vaan hänelle on tärkeää ymmärtää ne. Hän ei luovuta helposti laskiessaan vaikeaa tehtävää. Hänellä on matematiikan oppijana hyvä itsetunto. 2007 tehdyssä tutkimuksessa 860 opiskelijaa jakautuivat oppimisprofiileihin seuraavalla tavalla: tukea tarvitsevat 12,5 %, osaajat 26,1 %, pintasuuntautuneet 14.7 %, vertaisoppijat 24,0 % ja omin päin opiskelevat 22,7 %. (Pohjolainen, Silius, Huikkola, Raassina, 2007.) Tässä työssä on käytetty näitä viittä oppimisprofiilia.

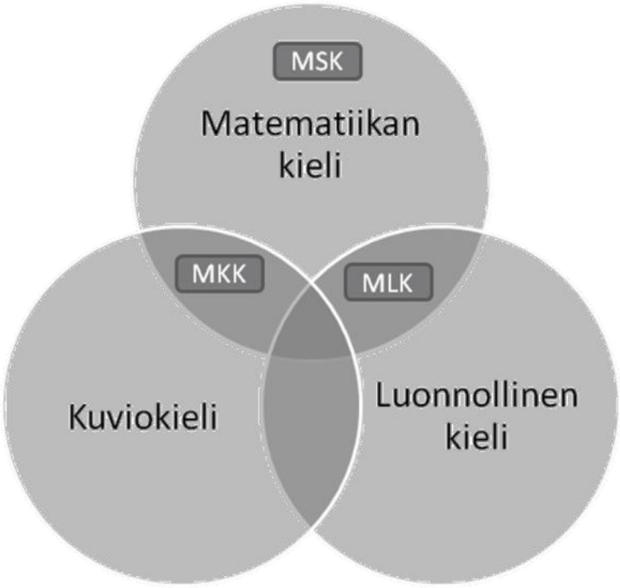
3 MATEMATIIKKA JA KIELI

”Matematiikka on tiede, joka käsittelee rakenteiden mallintamista, muutosta ja avaruuksia. Matemaattisen formalismin mukaan matematiikka on aksiomaattisesti määriteltyjen abstraktien rakenteiden tutkimista symbolisen logiikan ja matemaattisen merkintäjärjestelmän keinoin. Muitakin näkemyksiä on. Matematiikkaa voi ajatella fysikaalisten ja käsitteellisten suhteiden ilmaisemisen kielenä, jonka kielioppi ja käsitteistö on määritelty äärimmäisen tarkkaan. Tämä mahdollistaa asioiden ilmaisemisen tarkasti.” (Wikibooks)

On useita perusteita esittää matematiikka omana kielenään. Matematiikassa on oma erityinen sanasto, johon kuuluu suuri joukko nimenomaan matematiikalle vakiintuneita sanoja, ilmaisuja ja kielellisiä rakenteita. Pelkästään matematiikan käsitteisiin viittaavia sanoja ovat esimerkiksi kertolasku, summa, derivoituvuus ja monet muut. Matematiikassa on myös monia sellaisia sanoja, jotka tarkoittavat matematiikan kielellä jotain täysin muuta kuin ei-matematiikan kielellä kuten esimerkiksi diskreetti, sileä ja jatkuva. Myös monet sanayhdistelmät ovat saaneet matematiikassa oman merkityksensä. Tällainen on esimerkiksi ”jos ja vain jos”, joka on sanamuoto, mitä ei käytettä tavallisessa kielessä. Matematiikan kielelle ominaista on myös siinä käytetyt erilaiset symbolit ja merkit, jota ovat esimerkiksi logiikassa käytetyt kvanttorit. Opiskeltaessa matematiikkaa on opeteltava suuri määrä tällaisia symboleita, jotta pystyy lukemaan ja ymmärtämään matemaattista tekstiä. Matematiikan kieli kehittyy myös kokoajan. Tradition kautta otetaan uusia merkintöjä ja sanoja käyttöön ja samalla asialla tai käsitteellä voi olla monia eri nimiä tai merkintätapoja. Esimerkiksi funktion $y = f(x)$ derivaatta voidaan esittää merkinnöillä $f'(x)$, $Df(x)$ ja $\frac{dy}{dx}$. Tällainen kehitys on tyypillistä kielille. (Tossavainen, 2007.)

Hersh käyttää matematiikan kielestä kuitenkin kieltä (language) lievempää sanaa ”lingo”, sillä matematiikan kielellä ei voida esittää mitä tahansa. Ei voida esimerkiksi sanoa matemaattisesti, että ”minulla on päänsärky” tai ”sinä kyllästytät minua”. (Hersh, 1997.) Jamison esittää kolme seikkaa, jotka erottavat matematiikan kielen esimerkiksi suomesta. Matematiikan kielessä ei olla kiinnostuneita ajasta – ei ole nykyisyyttä, menneisyyttä tai tulevaisuutta - vaan matematiikassa kaikki vain ”on”. Toinen seikka on se, että matematiikan kielellä esitetyt lauseet eivät sisällä minkäänlaista tunnelatausta. Kolmas seikka on se, että matematiikan kieli on hyvin täsmällistä. Tämä on se asia, joka tuottaa eniten vaikeuksia opiskelijoille. (Jamison, 2000.)

Jos ajatellaan matematiikkaa kielenä, niin sen voidaan ajatella sisältyvän kulttuurista riippuvaan puhuttuun kieleen. Tällöin on järkevää tehdä kuvan 1 mukainen jako: matematiikan kieleen, luonnolliseen kieleen (ei-matemaattinen kieli) ja kuviokieleen. (Joutsenlahti, 2009.)



Kuva 1: Matematiikan kielen jakaminen. Lyhenteet: MSK= matematiikan symbolikieli, MKK= matematiikan kuviokieli ja MLK= matematiikan luonnollinen kieli. (Joutsenlahti, 2010.)

Tyypillisesti opiskelija käyttää kaikkia edellä mainittuja kielen osa-alueita ilmaisemaan ajatuksiaan. On myös tärkeää pystyä tarjoamaan opiskelijalle mahdollisuuksia oppia kaikkien näiden avulla. Keskitytään tästä eteenpäin yksinkertaisuuden vuoksi lähinnä matematiikan kieleen ja luonnolliseen kieleen, vaikka kuviokielen avulla voitaisiinkin saada hyvin mielenkiintoisia ja tehokkaita tehtävä- ja ratkaisumalleja kielentämisen näkökulmasta. (Joutsenlahti, 2010.)

Matematiikan kielen eri osien huomioiminen opetuksessa on tärkeää eri oppijoille. Esimerkiksi visuaalisille oppijoille matematiikan kuviokielestä on paljon apua, kun taas auditiivinen oppija hyötyy matematiikan kääntämisestä luonnolliselle kielelle sekä keskustelusta. Opettajan on tärkeää tarjota riittävästi apua oppimiseen. Siksi ei riitä, että lasketaan vain perinteisiä matematiikan tehtäviä esimerkkien avulla, vaan on haastettava opiskelijat ajattelemaan omalla tavallaan. Tällöin päästään syvälliseen oppimiseen pinnallisen ulkoa opettelun sijaan.

Eräs syy aikaisemmin mainitun matematiikkakuilun syntymiseen voi olla se, ettei matematiikan eri kieliä käytetä opetuksessa tehokkaasti. Matematiikan opetuksessa tavallisin kieli on varmasti matematiikan symbolikieli, mutta monet oppijat hyötyisivät kuviokielen ja luonnollisen kielen lisäämisestä oppimateriaaleihin (kirjoihin, muistiinpanoihin sekä esimerkkitehtäviin).

4 KIELENTÄMINEN

Ymmärtääkseen matematiikkaa ja oppiakseen esittämään ajatuksiaan matemaattisesti täsmällisesti opiskelija tarvitsee ymmärryksen matematiikan kielestä. Tällöin hän pystyy kommunikoimaan suullisesti ja kirjallisesti matematiikasta ilman väärinymmärryksiä. **Kielentämisellä** tarkoitetaan tässä matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen (kts. kuva 1) avulla pääsääntöisesti suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti, 2009). Tähän tarvitaan matematiikan kielen sujuvaa osaamista. On ymmärrettävä, etteivät luonnollisen kielen lauseet käänny suoraan matematiikan kielelle.

Kielentämistä ja matematiikan eri kieliä on tutkittu monella koulutustasolla. Kirjallista kielentämistä on kokeiltu yliopiston ja lukion lisäksi myös peruskoulutasolla ja suullista kielentämistä on kokeiltu esiopetuksessa (Joutsenlahti, Rättyä, 2011). Tässä tutkimuksessa on keskitytty suurimmaksi osaksi yliopistotason opetukseen.

Eräs kielentämisen apukeino (ehkäpä yksinkertaisin ja huomaamatta käytetyin) on sanalliset tehtävät. Niissä opiskelijan on osattava kääntää matematiikan kielelle tehtävänannossa luonnollisella kielellä kysytyt asiat. Tässä ei kuitenkaan ole rajattu mitenkään opiskelijan ratkaisua. Se voi olla täysin matemaattinen tai sisältää luonnollista kieltä. Rajataan kielentämistehtävä tästä eteenpäin tarkoittamaan sellaisia tehtäviä, joissa opiskelija käyttää kielentämisen keinoja ratkaisussaan. Esitellään tällaisia ratkaisuja myöhemmin.

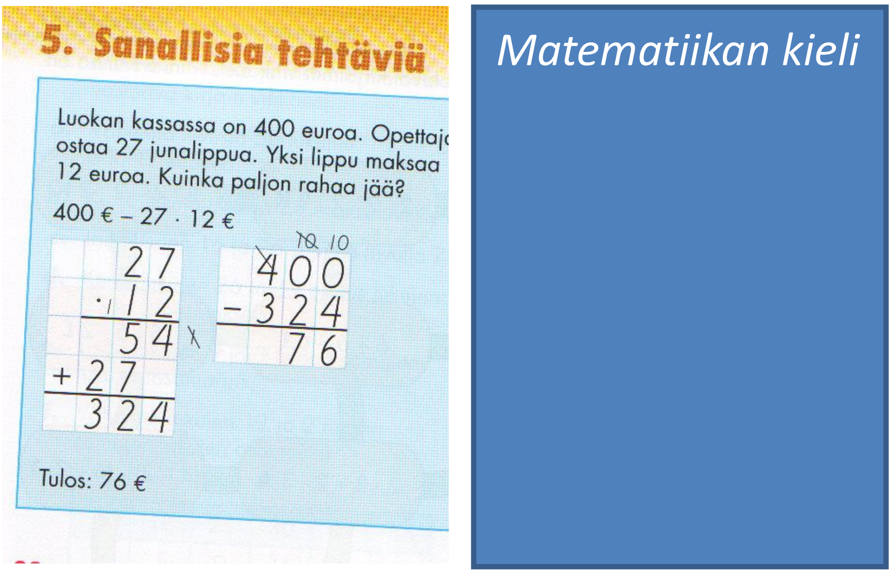
Keskustelulla on suuri vaikutus opetuksessa. Kun opiskelijat keskustelevat ja vaihtavat ajatuksiaan matematiikan asioista, joutuvat he kääntämään matematiikan kieltä luonnolliselle kielelle. Matemaatikko R. L. Moore kehitti tähän perustuvan opetusmetodin. Mooren metodina tunnetussa opetustavassa opettaja lähinnä esittelee opetettavan asian lähtökohdan ja joukon hypoteeseja sekä ohjaa keskustelemalla opiskelijoita löytämään itse asiaan liittyvät oleelliset matematiikan ilmiöt ja perustelemaan ne todeksi. Tällä tavalla opettaja pystyy ohjaamaan opiskelijoita kehittämään matemaattista ilmaisuaan oikeaksi. Tämä menetelmä vaatii opettajalta muun muassa kärsivällisyyttä ja taitavaa matemaattista ilmaisua. Opiskelijoilta vaaditaan aktiivisuutta ja osallistumista, eikä ryhmäkoko saa olla kovin suuri. (Tossavainen, 2007.)

Erityisesti nyt kannattaa keskustella kielentämisestä matematiikan opetuksen ohessa lukioissa ja yliopistoissa, koska keväällä 2012 astui voimaan uusi määräys matematiikan ylioppilaskirjoituksiin. CAS laskimen käyttäminen on sallittua ylioppilaskokeessa. Tämän vuoksi mekaanisen laskemisen painoarvo saattaa vähentyä tulevaisuudessa (ellei ole jo vähentynyt). Välivaiheiden selittäminen ja perustelu taas saa enemmän painoarvoa, sillä ymmärtäminen ja ymmärryksen ilmaiseminen on tärkeämpää tietotekniikan hyödyntämisen rinnalla.

4.1 Kielentämisstrategiat

Kun puhutaan kielentämistehtävien ratkaisemisesta, on järkevää erotella toisistaan kielentämistehtävät ja kielentämällä tehdyt tehtävän ratkaisut. Esitellään tässä kappaleessa ratkaisumalleja, joita opiskelija voi hyödyntää ratkaistessaan matematiikan harjoituksia. Esitellään viisi ratkaisumallia: standardimalli, kertomusmalli, tiekarttamalli, kommenttimalli ja päiväkirjamalli (Joutsenlahti, 2010).

Standardimallissa tehtävä ratkaistaan puhtaasti matemaattisin merkinnöin. Tämä on yleinen malli esimerkiksi peruskoulumatematiikassa, kun harjoitellaan mekaanista laskemista. Standardimallissa laskija ei kommentoi, otsikoi tai selitä laskuvaiheitaan mitenkään sanallisesti vaan vain matematiikan symboleilla. Alla olevassa kuvassa on esitelty standardimalli siten, että vasemmalla puolella on tehtävän ratkaisu ja oikealla oleva laatikko kuvaa tehtävän ratkaisua graafisesti. (Joutsenlahti, 2010.)



Kuva 2: Standardimalli (Joutsenlahti, 2010.)

Kertomusmallissa tehtävän ratkaisu on kirjoitettu ikään kuin tarinaksi lisäämällä ja täydentämällä matemaattisten lausekkeiden väliin luonnollista kieltä. Ratkaisu on tällöin helposti luettavissa, kun lukija tietää kokoajan mitä laskija on tarkoittanut tehdessään jonkin matemaattisen operaation. Kertomusmalli kuvassa 3. (Joutsenlahti, 2010.)

Todistetaan, että kahden parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.

Olkoot m ja n parillisia kokonaislukuja, eli ne voidaan kirjoittaa muodossa

$m = 2k$, $n = 2s$,

missä k ja s ovat kokonaislukuja.

Näiden merkintöjen ja reaalilukujen kertolaskusääntöjen avulla alkuperäisten lukujen tulo voidaan kirjoittaa

$m \cdot n = (2k) \cdot (2s) = 2 \cdot (2ks)$,

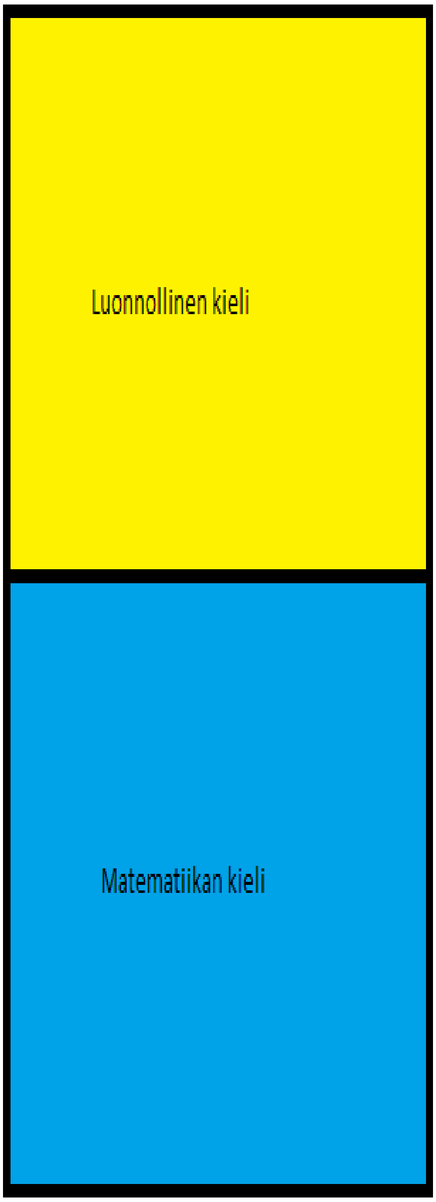
Missä

$2ks$=p

on kokonaisluku, sillä kokonaislukujen tulon arvo on aina kokonaisluku.

Kuva 3: Kertomusmalli (Joutsenlahti, Sarikka, 2012)

Tiekarttamallissa laskija selittää ensin luonnollisella kielellä ratkaisun vaiheet ja suorittaa vasta sitten matemaattiset toimenpiteet. Tämän mallin heikkous voi olla siinä, että laskijan tulee tietää heti ratkaisun alussa, että miten ratkaisun tulee edetä. Heikommille laskijoille tämä voi olla haastavaa. Tiekarttamalli kuvassa 4. (Joutsenlahti, 2010.)



Kahdesta luvusta tiedetään, että ne ovat positiivisia ja niiden summa on 50. Määritä luvut siten, että niiden tulo on mahdollisimman suuri.

1. keksitään luvuille muuttujat
2. muodostetaan muuttujista yhtälö ja esitetään toinen muuttuja toisen avulla
3. kirjoitetaan yhden muuttujan funktio lukujen tulolle
4. varmistetaan, että funktio on jatkuva ja derivoituva
5. ratkaistaan funktion ääriarvokohdat, joita voivat olla derivaatan nollakohdat ja määrittelyalueen päät
6. tutkitaan missä ääriarvokohdassa funktio saa suurimman arvonsa, jolloin tiedetään toinen luku
7. ratkaistaan vielä toinen muuttuja ja annetaan nämä kaksi lukua vastaukseksi

1. Olkoot luvut $x > 0$ *ja* $y > 0$

2. $x + y = 50 \Leftrightarrow y = 50 - x$

3. $f(x) = x(50 - x)$, $x > 0$

4. Polynomifunktio on kaikkialla määrittelyalueellaan jatkuva ja derivoituva.
5. $f'(x) = 50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 25$ *(määrittelyalueen päätepiste*

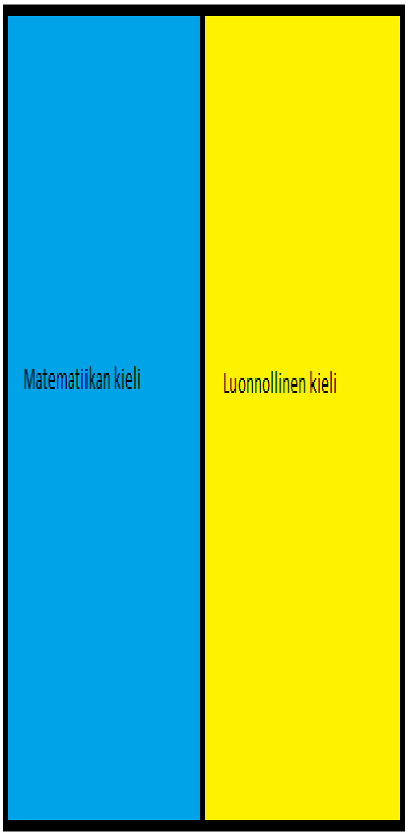
0 ei kuulu alueeseen, sitä ei siis oteta huomioon mahdollisena ääriarvokohtana)
6. $f(25) = 25^2 = 775$ *on funktion suurin arvo, sillä esimerkiksi*

$f(5) = 5 \cdot 45 = 225$ *on pienempi.*

7. Koska $x = 25$*, niin . Vastaus on siis 25 ja 25.*

Kuva 4: Tiekarttamalli (Joutsenlahti, Sarikka, 2012)

Kommenttimallissa laskija kirjoittaa luonnollisella kielellä kommentteja laskujensa viereen. Näin hän voi kertoa joka kohdassa ikään kuin marginaalissa, mitä hän milloinkin on tekemässä. Tämä malli on kuvassa 5. (Joutsenlahti, 2010.)



Etsi seuraavasta todistuksesta virhe. Perustele välivaiheet.

Todistetaan, että $4 = 2$. *Olkoon* $a = b = 2$, *jolloin*

$a = b$

$\Leftrightarrow a^2 = ab$ Yhtälö on kerrottu puolittain a:lla

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$ Puolittain vähennetty termi b^2

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b) = b(a - b)$ Tekijöihinjako

$\Leftrightarrow a + b = b$ Molemmat puolet on jaettu $(a - b)$:llä

$\Leftrightarrow 2 + 2 = 2$ Lukuarvot sijoitettu

$\Leftrightarrow 4 = 2$

Virhe on punaisella merkityssä kohdassa, sillä kyseinen jako on nollalla jakamista.

Kuva 5: Kommenttimalli (Joutsenlahti, Sarikka, 2012)

Päiväkirjamalli on samankaltainen kuin kertomusmalli, mutta ehkäpä hieman helpommin lähestyttävä. Siinä laskija kirjoittaa lyhyesti luonnollisella kielellä otsakkeita ja kommentteja laskuvaiheiden väliin. Tämä on ehkä luonnollisin tapa aloittaa kielentäminen, sillä tähän kannustetaan normaalisti jo esimerkiksi lukioissa. Tämän mallin esimerkki on kuvassa 6. (Joutsenlahti, 2010.)

Lasketaan funktion $f(x) = x^2 - 2x$ nollakohdat

ja ääriarvot.

Nollakohdat:

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = \mathrm{x}(\mathrm{x} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; tai \; x = 2$

Ääriarvokohta on derivaatan nollakohta:

$f'(x) = 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Ääriarvo on funktion arvo ääriarvokohdassa:

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

Kuva 6: Päiväkirjamalli (Joutsenlahti, Sarikka, 2012)

4.2 Kielentämistehtävätyypit

Edellisessä kappaleessa tutustuttiin erilaisiin keinoihin ratkaista matematiikan tehtävä kielentämisen kannalta. Siinä annettiin siis kielentämisen keinoja opiskelijalle. Tässä kappaleessa esitellään erilaisia kielentämistehtävämalleja, jotka puolestaan ovat kiinnostavia opettajan näkökulmasta. Samalla haetaan vastausta tutkimuskysymykseen: Millaisia kielentämistehtävämalleja voidaan kehittää? Esitellään seitsemän erilaista tehtävämallia, jotka nimetään taulukon 1 mukaisesti.

Taulukko 1: Kuusi kielentämistehtävämallia

A	koodaus	matematiikan kielten eri osa-alueiden välillä tapahtuvaa ns. kääntämistä
B	täydennys	täydennetään annettuun ratkaisuun puuttuvia ratkaisun kannalta olennaisia osia
C	virheen etsintä	etsitään valmiiksi annetusta ratkaisusta virhe(itä)
D	ratkaisusta tehtävä	päätellään annetusta ratkaisusta kysytty asia eli tehtävänanto, johon ratkaisu sopii
E	ratkaisun argumentointi	perustellaan valmista tai itse tehtyä ratkaisua matematiikan eri kielien avulla
F	tiedonseulonta	etsitään tehtävänannosta ratkaisun kannalta olennaiset asiat
g	omin sanoin selvitys	selvitetään kirjallisesti tai suullisesti jokin asia ilman matematiikan symbolikieltä

Jokaista tehtävämallia voi periaatteessa lähteä ratkaisemaan minkä tahansa edellä esitetyn ratkaisumallin avulla.

Koodaustehtävä tarkoittaa matematiikan esittämistä luonnollisen kielen avulla tai toisin sanottuna kielen kääntämistä luonnollisesta kielestä matematiikan kieleen tai päinvastoin. Tehtävänannossa voidaan pyytää kääntämään matematiikan kieltä luonnolliseksi kieleksi, kommentoimaan luonnollisella kielellä ratkaisua tai muuta vastaavaa. Koodaus on siis matematiikan kielen kääntämistä luonnolliselle kielelle tai toisinpäin. Tästä esimerkki 1:

Esimerkki 1. *Kirjoita matemaattisin merkinnöin:*

a) *ei-negatiiviset kokonaisluvut*
b) *Jos sataa, niin paistaa.*
c) *x kuuluu parillisten kokonaislukujen joukkoon…*

Täydennystehtävässä annetaan puutteellinen ratkaisu, johon pyydetään lisäämään puuttuvia välivaiheita, perusteluja tai selityksiä. Täydennystehtävä voi olla esimerkin 2 tyyppinen:

Esimerkki 2. *Kirjoita seuraavaan todistukseen puuttuvat välivaiheet ja perustelut. Osoitetaan, että kaikille reaaliluvuille x ja y pätee*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

Todistus:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

$$|y| = \cdots \leq |x - y| + |x|$$

jolloin

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y|$$

Virheen etsinnässä annetaan myös valmis ratkaisu, johon on tehty virhe. Tehtävänä on perustella oikeat välivaiheet ja löytää ja korjata väärät. Tässä laskijan on ymmärrettävä ja osattava perustella käytetyt matemaattiset toimenpiteet. Virheen etsinnästä esimerkkinä on kuvan 4 esimerkki sekä esimerkki 3:

Esimerkki 3. *Miten todistus menee pieleen? Korjaa todistus.*
Todistetaan, että jos $a > b > 0$, *niin* $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$
$$\Rightarrow \; ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \; ab < \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$
$$\Rightarrow \; 4ab < a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \; 0 < a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \; 0 < (a-b)^2$$

joka on totta, koska $a > b$.
Tässä todistus on lähdetty väitteestä, eikä oletuksesta. Oikea todistus olisi

$$a > b$$
$$\Rightarrow 0 < a - b$$
$$\Rightarrow \; 0 < (a-b)^2$$
$$\Rightarrow \; 0 < a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \; 4ab < a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \; ab < \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$
$$\Rightarrow \; ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

Eräs kielennystehtävänanto voi olla pelkästään jokin täydellinen ratkaisu, johon pitää keksiä tehtävänanto. Tällaisen tehtävänannon avulla voidaan nähdä miten opiskelija on ymmärtänyt kyseessä olevan asian ja osaako hän soveltaa sitä.

Ratkaisun argumentoinnilla tarkoitetaan tässä sellaista tehtävänantoa, jossa pyydetään perustelemaan sanallisesti tehtävän kannalta kiinnostavia asioita. Voitaisiin esimerkiksi kysyä derivointitehtävän yhteydessä mitä tarkoittaa derivoituvuus ja miksi derivaatasta ollaan yleensä kiinnostuneita. Tällöin opiskelija joutuu tutustumaan derivaatan sovelluksiin ja teoriaan osatakseen vastata hyvin esitettyihin kysymyksiin. Tällaisen sanallisen tehtävän hyvä puoli on siinä, että nyt opiskelija joutuu perustelemaan laskutoimenpiteitä, jotka on opittu lukiossa tekemään rutiininomaisesti. Erään opiskelijan neuvo toiselle opiskelijalle matematiikan lisäopetuksessa olikin: ”Kannattaa aina ensin derivoida ja laskea derivaatan nollakohdat. Ei se väärinkään ole ja todennäköistä on, että niitä tarvitaan”.

Tiedonseulontatehtävässä on tehtävänannossa liikaa lähtötietoja, joista opiskelijan on osattava valita tehtävänratkaisun kannalta oleelliset. Tällainen tehtävämalli on esimerkiksi

Esimerkki 4. *40:stä metristä piikkilankaa halutaan tehdä suorakulmion muotoinen aitaus siten, että aidassa on kaksi kierrosta piikkilankaa, joista toinen on 60 cm:n korkeudella ja toinen 50 cm edellistä korkeammalla. 10 m piikkilankaa maksaa 10 euroa. Kuinka pitkät pitäisi aitauksen sivujen olla, jotta pinta-ala on mahdollisimman suuri?*
Ratkaisu:
Olkoon kaksi vastakkaista sivua pituudeltaan x*, jolloin jäljelle jääneiden sivujen pituus on oltava* $y = 10 - x$*, sillä sivujen yhteispituus* $2x + 2y = 20$*. Nyt pinta-alalle saadaan funktio* $f(x) = x(10 - x)$*, missä* $x \in [0, 10]$*, jota halutaan maksimoida. Ratkaistaan derivaatan nollakohta:* $f'(x) = 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5x \in]0, 10[$*. Koska funktiosta tiedetään, että se on alaspäin aukeava paraabeli, on tämän derivaatan nollakohdan oltava funktion maksimikohta. Sivujen pituudet ovat siis 5 ja 5.*

5 TUTKIMUSONGELMAT

Tähän diplomityöhön liittyvää tutkimusta tehtiin kolmessa kohteessa: Tampereen teknillisessä yliopistossa, Turun yliopistossa ja Tampereen normaalikoulussa. Osa tutkimuksesta on kvantitatiivista ja osa kvalitatiivista. Tutkimuksessa haluttiin vastata johdantokappaleessa esiteltyihin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaisia kielentämistehtävämalleja voidaan kehittää?
2. Millaiset kielentämistehtävät ovat toimivia?
3. Mitä mieltä opiskelijat ovat kielentämisestä ja kielentämistehtävistä?
4. Miten kielentämistä voi hyödyntää matematiikan opetuksessa ja oppimisessa?

Ensimmäiseen kysymykseen kielentämistehtävämalleista on vastattu edellisessä kappaleessa. Koodaustehtävät, ratkaisun argumentointi, virheen etsintä, tiedon seulonta sekä ratkaisusta tehtävänanto ovat kaikki sellaisia tehtävätyyppejä, joita käytimme tutkimuksessa. Suurin osa tehdyistä kielentämistehtävistä yhdisteli eri kielentämistehtävätyyppejä ja tutkimuksessa oli muutama esitettyjen tehtävätyyppien ulkopuolelle jäänyt tehtävämalli, jotka yhdistelivät matematiikkaa ja luonnollista kieltä esimerkiksi miellekarttojen avulla. Kaikki tutkimuksessa käytetyt mallitehtävät on esitetty tämän diplomityön liitteissä.

Toiseen kysymykseen kielentämistehtävien toimivuudesta on haettu vastausta opiskelijoiden mielipiteistä, siitä, miten innokkaasti jonkinlaista tehtävää on tehty, sekä opettajan huomioiden perusteella. Löytyi sellaisia tehtävämalleja, joita opiskelijat pitivät hyödyllisinä, ja toisaalta kokeiltiin tehtäviä, joita opiskelijat pitivät vaikeina ja suuritöisinä.

Opiskelijoiden mielipiteitä mitattiin kyselyllä, joka löytyy kokonaisuudessaan liitteistä. Asenteita mitattiin sekä matematiikkaa kohtaan että kielentämistäkin kohtaan.

6 TUTKIMUSTULOKSIA

Tässä luvussa esitellään kielentämistehtävämalleihin liittyviä tuloksia. Luvun kappaleisiin on koottu tutkimusten eri kohteissa käytettyjä tehtäviä sekä joitakin esimerkkiratkaisuja näihin tehtäviin.

6.1 Tampereen teknillinen yliopisto

Syyslukukaudella 2012 tutkittiin Tampereen teknillisessä yliopistossa matematiikan kielentämistä yhdellä Insinöörimatematiikan kurssilla. Jokaisen TTY:n opiskelijan on suoritettava tietty määrä matematiikkaa osana perusopintoja. Tutkimukseen osallistunut kurssi oli Insinöörimatematiikka 1 C eli ensimmäinen pakollinen matematiikan kurssi ensimmäisen vuoden opiskelijoille. Ryhmään kuului enimmäkseen kone- ja rakennustekniikan opiskelijoita.

Kurssin suoritukseen kuuluvien viikkoharjoitusten lisäksi opiskelijoille annettiin yksi erikseen merkitty kielentämistehtävä, joka oli kurssin kotisivulla omana linkkinään. Kuten kaikki muutkin tehtävät myös kielentämistehtävä oli vapaaehtoinen opiskelijoille, mutta siitä oli mahdollista saada tavalliseen harjoitustehtävään nähden kaksinkertaiset bonuspisteet. Bonuspisteiden perusteella laskettiin tehtyjen harjoitusten määrä; 40 % oli tehtävä läpäistäkseen kurssin ja suuremmasta määrästä sai hyvitystä arvosanaan. Kielentämistehtävät palautettiin harjoitusten pitäjille ja tehtävien malliratkaisut laitettiin kurssin kotisivuille opiskelijoiden nähtäväksi. Kielennystehtävät ja malliratkaisut laativat Hanna Sarikka ja Jussi Kangas.

Kurssin viimeisellä harjoitusviikolla opiskelijoille esitettiin kysely, johon vastattiin sähköisesti kurssin kotisivulla. Kysely kartoitti opiskelijoiden mielipiteitä kielentämisestä. Tutkimuksessa otettiin lisäksi huomioon kurssin lopputentin arvosanat.

6.1.1 Tehtäviä ja esimerkkiratkaisuja

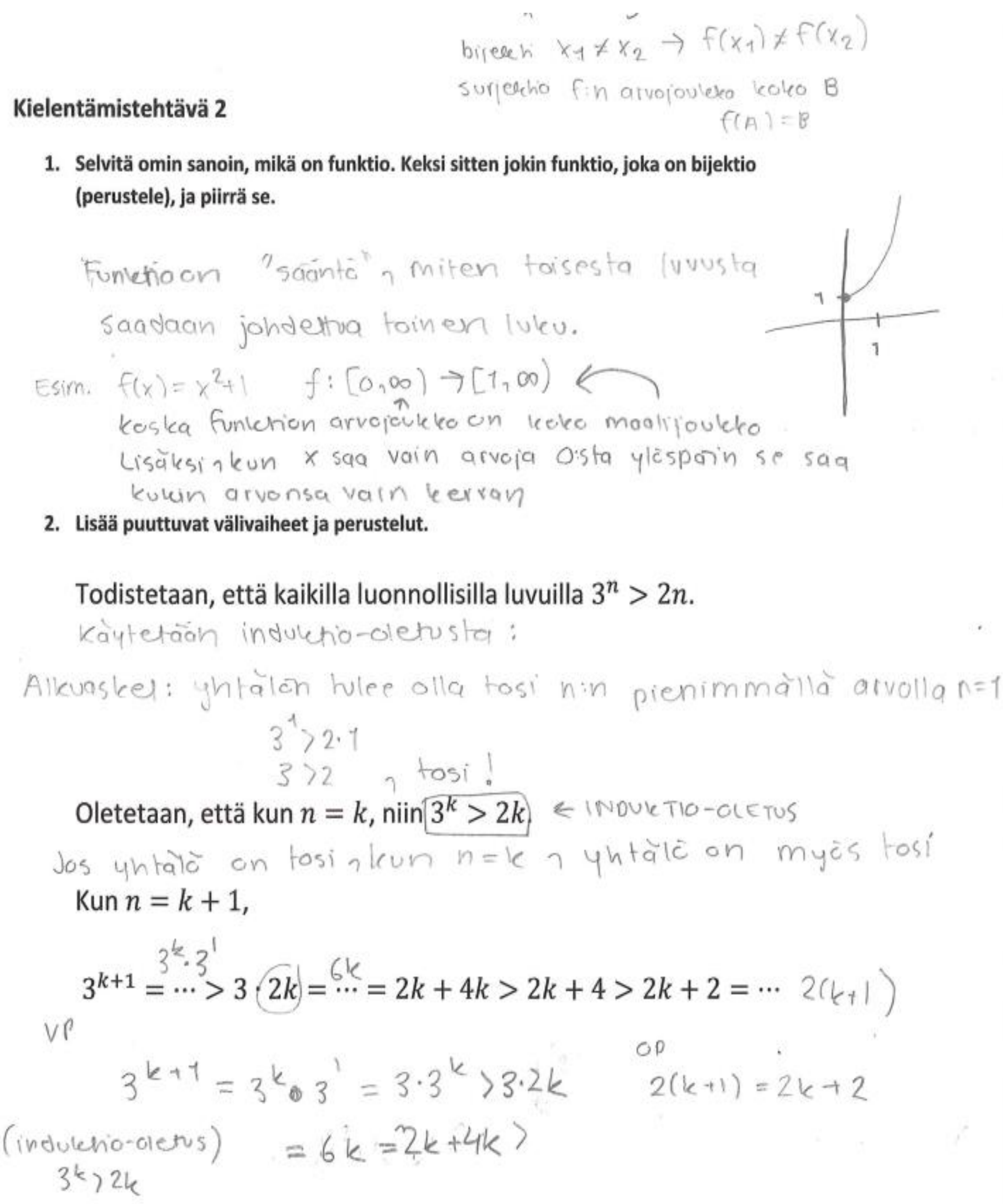
Tässä kappaleessa esitellään Tampereen teknillisessä yliopistossa Insinöörimatematiikka 1 C – kurssin (207 opiskelijaa) tehtyjä kielentämistehtäviä ja ratkaisuja niihin. Esimerkkiratkaisuiden täsmällisyyteen ja oikeellisuuteen ei ole otettu kantaa, vaan tarkoitus on esitellä kielentämistä käytännössä. TTY:llä kielentämistehtävät saivat hyvän vastaanoton opiskelijoilta ja tehtäviä tehtiin melko paljon, vaikka niistä sanottiinkin, että ne olivat suuritöisiä ja aikaa vieviä. Taulukosta 1 voidaan päätellä, mitkä tehtävät olivat opiskelijoille vaikeita tai epämieluisia ja mitkä puolestaan helppoja.

Taulukko 2: Tampereen teknillisessä yliopistossa tehtyjen kielentämistehtävien palautuslukumäärät (N=207)

Harjoitustehtävä	Palautuksia (kpl)
1	77
2	67
3	33
4	59
5	55

Taulukon 1 palautusmäärien perusteella voidaan arvella, että kolmannen viikon tehtävä oli opiskelijoille vaikea, kun taas ensimmäiset kaksi tehtävää olivat helpompia. On kuitenkin huomioitava, että tämä on opiskelijoiden ensimmäisen vuoden ensimmäinen matematiikan kurssi. Oman kokemukseni perusteella ei ensimmäisen viikon palautusmäärällä ole kovin suurta yhteyttä tehtävän helppouteen tai mielekkyyteen, koska opiskelun alussa opiskelijat eivät vielä ole tottuneet yliopisto-opiskeluun ja siihen, ettei kaikkia tehtäviä tarvitse palauttaa. Neljännen viikon tekijämäärän tuplaantuminen edellisviikkoon verrattuna kertoo siitä, että opiskelijat tekivät tätä tehtävää mielellään. Myös mielipidekyselyiden perusteella viimeiset kaksi tehtävää olivat opiskelijoiden mielestä hyviä tehtäviä.

Liitteissä 1-5 on kaikki Tampereen teknillisen yliopiston tutkimuksessa käytetyt tehtävät ja esimerkkiratkaisut niihin. Näistä tehtävistä on tässä kappaleessa esitelty liitteiden 2, 3 ja 4 tehtävät. Liitteen 5 tehtävä on hyvin samanlainen kuin liitteen 4. Liitteessä yksi on hyvin perinteinen koodaus tyyppinen tehtävä ja sen lisäksi virheenetsintä ja argumentointi tehtävä.



bijekti $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
surjektio f:n arvojoukko koko B
$f(A) = B$

Kielentämistehtävä 2

1. **Selvitä omin sanoin, mikä on funktio. Keksi sitten jokin funktio, joka on bijektio (perustele), ja piirrä se.**

Funktio on "sääntö", miten toisesta luvusta saadaan johdettua toinen luku.

Esim. $f(x) = x^2+1$ $\quad f: [0,\infty) \rightarrow [1,\infty)$
koska funktion arvojoukko on koko maalijoukko
Lisäksi, kun x saa vain arvoja 0:sta ylöspäin se saa kukin arvonsa vain kerran

2. **Lisää puuttuvat välivaiheet ja perustelut.**

Todistetaan, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $3^n > 2n$.
Käytetään induktio-oletusta:

Alkuaskel: yhtälön tulee olla tosi n:n pienimmällä arvolla n=1
$3^1 > 2 \cdot 1$
$3 > 2$, tosi!

Oletetaan, että kun $n = k$, niin $\boxed{3^k > 2k}$ ← INDUKTIO-OLETUS
Jos yhtälö on tosi, kun $n=k$, yhtälö on myös tosi
Kun $n = k + 1$,

$3^{k+1} = \overset{3^k \cdot 3^1}{\cdots} > 3 \cdot 2k = \overset{6k}{\cdots} = 2k + 4k > 2k + 4 > 2k + 2 = \cdots\ 2(k+1)$

VP

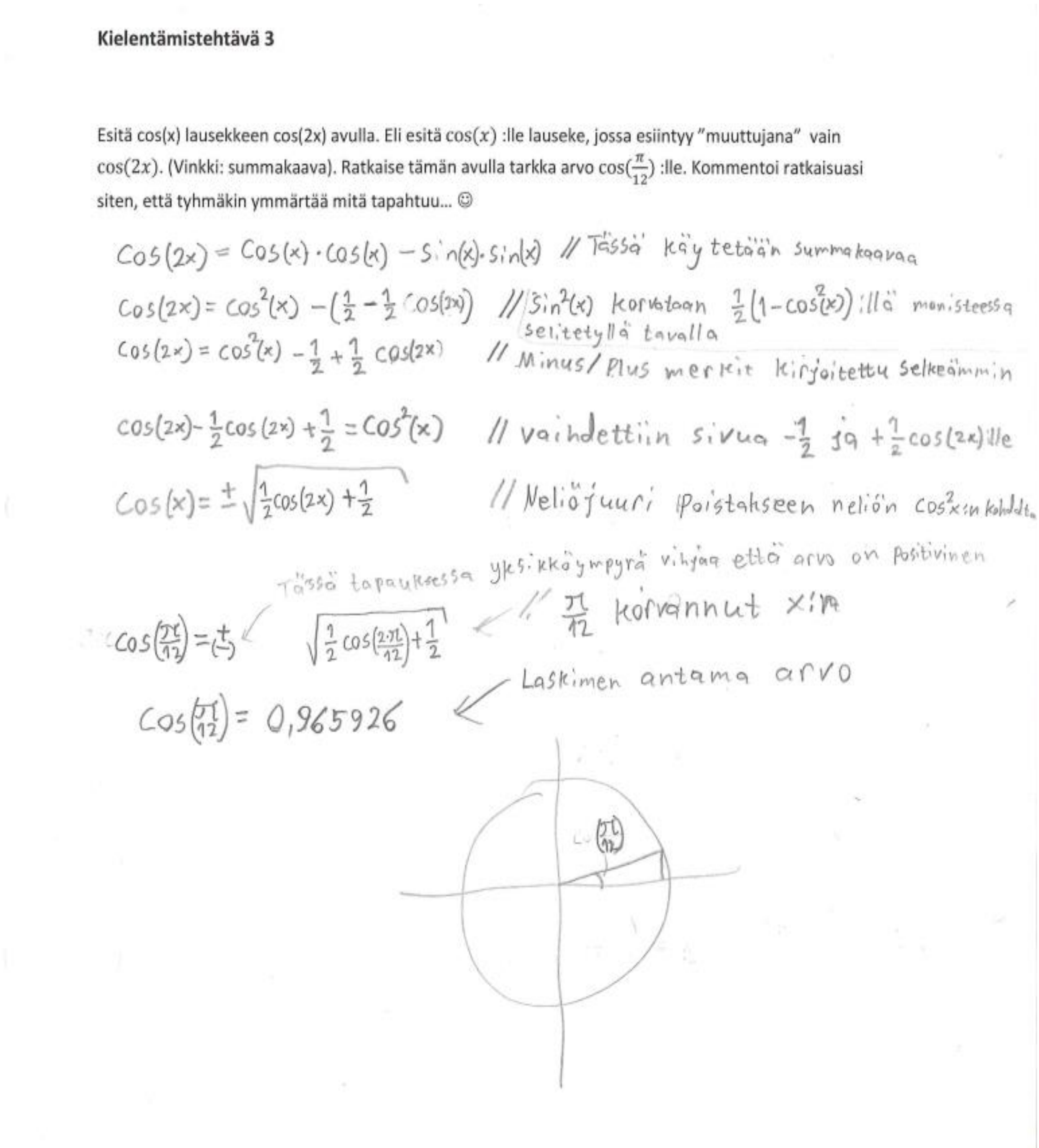
$3^{k+1} = 3^k \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot 2k$
$= 6k = 2k + 4k >$

OP
$2(k+1) = 2k + 2$

(induktio-oletus)
$3^k > 2k$

Kuva 7: Kurssin toista kielentämistehtävää ratkaistiin toiseksi eniten; 67 opiskelijaa palautti tehtävän.

Kuvan 7 tehtävätyyppi (katso liite 2) voidaan luokitella koodaukseksi, täydennystehtäväksi, argumentoinniksi ja omin sanoin selvittämiseksi eli taulukon 1 merkintöjä käyttäen tämä tehtävä on tyyppi A, B, E ja G. Tehtävä tukee kaikkien kuvan 1 matematiikan kielien osa-alueita, sillä tehtävässä pyydetään selittämään, laskemaan ja piirtämään. Tehtävän tekijän vastaus on kielentämisstrategioista lähinnä päiväkirjamallia. Tämän tyyppinen tehtävä vaatii hyviä analysoimistaitoja.



Kielentämistehtävä 3

Esitä cos(x) lausekkeen cos(2x) avulla. Eli esitä $\cos(x)$:lle lauseke, jossa esiintyy "muuttujana" vain $\cos(2x)$. (Vinkki: summakaava). Ratkaise tämän avulla tarkka arvo $\cos(\frac{\pi}{12})$:lle. Kommentoi ratkaisuasi siten, että tyhmäkin ymmärtää mitä tapahtuu... ☺

$\cos(2x) = \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)$ // Tässä käytetään summakaavaa

$\cos(2x) = \cos^2(x) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x))$ // $\sin^2(x)$ korvataan $\frac{1}{2}(1-\cos^2(x))$:llä monisteessa selitetyllä tavalla

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ // Minus/Plus merkit kirjoitettu selkeämmin

$\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} = \cos^2(x)$ // vaihdettiin sivua $-\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{2}\cos(2x)$:lle

$\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}}$ // Neliöjuuri poistakseen neliön $\cos^2x$:n kohdalta

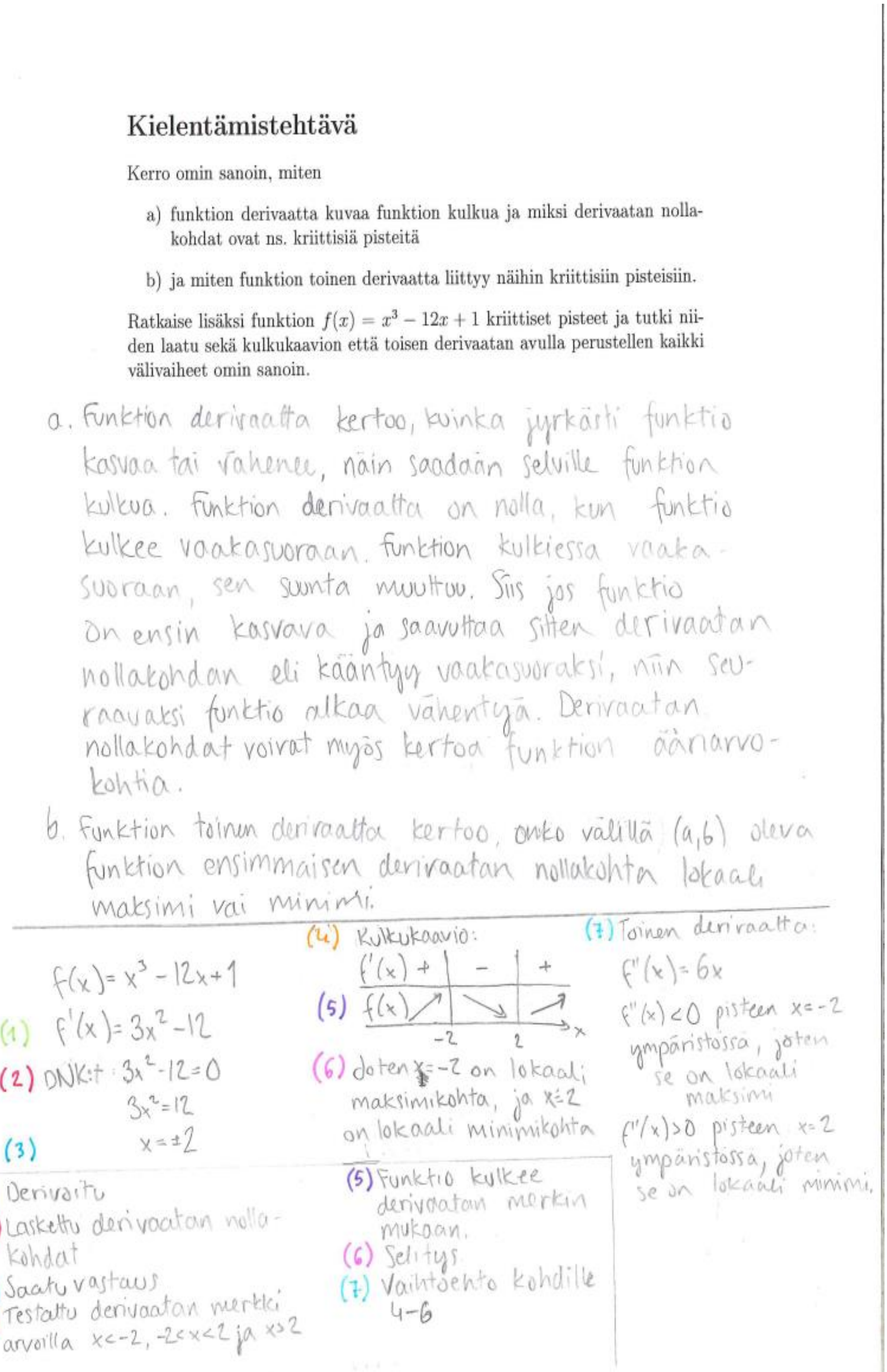
Tässä tapauksessa yksikköympyrä vihjaa että arvo on positiivinen

$\cos(\frac{\pi}{12}) = (\pm)\sqrt{\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{12}) + \frac{1}{2}}$ // $\frac{\pi}{12}$ korvannut x:n

$\cos(\frac{\pi}{12}) = 0{,}965926$ Laskimen antama arvo

Kuva 8: Kolmas kielentämistehtävä oli opiskelijoille ilmeisesti haastavin. 33 opiskelijaa palautti tehtävän. Tämä oli selvästi pienin määrä palautuksia verrattuna muihin kielentämistehtäviin.

Kuvan 8 tehtävätyyppi on A ja E (katso liite 3). Tehtävän ratkaisija on käyttänyt ratkaisustrategianaan kommentointimallia. Tehtävä tukee matematiikan symbolikielen ja luonnollisen kielen oppimista. Tämä opiskelija on käyttänyt apunaan myös kuviokieltä, vaikka tehtävän anto ei sitä vaadi.



Kielentämistehtävä

Kerro omin sanoin, miten

a) funktion derivaatta kuvaa funktion kulkua ja miksi derivaatan nollakohdat ovat ns. kriittisiä pisteitä

b) ja miten funktion toinen derivaatta liittyy näihin kriittisiin pisteisiin.

Ratkaise lisäksi funktion $f(x) = x^3 - 12x + 1$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu sekä kulkukaavion että toisen derivaatan avulla perustellen kaikki välivaiheet omin sanoin.

a. Funktion derivaatta kertoo, kuinka jyrkästi funktio kasvaa tai vähenee, näin saadaan selville funktion kulkua. Funktion derivaatta on nolla, kun funktio kulkee vaakasuoraan. Funktion kulkiessa vaakasuoraan, sen suunta muuttuu. Siis jos funktio on ensin kasvava ja saavuttaa sitten derivaatan nollakohdan eli kääntyy vaakasuoraksi, niin seuraavaksi funktio alkaa vähentyä. Derivaatan nollakohdat voivat myös kertoa funktion ääriarvokohtia.

b. Funktion toinen derivaatta kertoo, onko välillä (a,b) oleva funktion ensimmäisen derivaatan nollakohta lokaali maksimi vai minimi.

$f(x) = x^3 - 12x + 1$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 12$

(2) DNK:t: $3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

(3) $x = \pm 2$

(4) Kulkukaavio:

		-2		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
(5) $f(x)$	↗		↘		↗

(6) joten $x = -2$ on lokaali maksimikohta, ja $x = 2$ on lokaali minimikohta

(7) Toinen derivaatta:

$f''(x) = 6x$

$f''(x) < 0$ pisteen $x = -2$ ympäristössä, joten se on lokaali maksimi

$f''(x) > 0$ pisteen $x = 2$ ympäristössä, joten se on lokaali minimi.

(1) Derivoitu
(2) Laskettu derivaatan nollakohdat
(3) Saatu vastaus
(4) Testattu derivaatan merkki arvoilla $x < -2$, $-2 < x < 2$ ja $x > 2$

(5) Funktio kulkee derivaatan merkin mukaan.
(6) Selitys
(7) Vaihtoehto kohdille 4–6

Kuva 9: Neljättä kielentämistehtävää palautettiin 59 kappaletta. Sanallisen palautteen perusteella opiskelijat pitivät tätä tehtävää hyvin hyödyllisenä ja opettavaisena.

Kuvan 9 tehtävänanto on tyyppiä E ja G ja ratkaisustrategia on ollut lähinnä tiekarttamallia (katso liite 4). Tehtävänanto tukee kaikkien kuvan 1 matematiikan kielen osa-alueita. Lisäksi se vaatii opiskelijalta syvällistä perehtymistä opetettavaan asiaan, minkä takia monet opiskelijat pitivät tätä tehtävää hyödyllisenä. Toiset opiskelijat tosin pitivät tätä tehtävää liian suuritöisenä.

6.2 Turun yliopisto

Turun yliopistossa tehtiin vastaavanlainen kielentämiskokeilu kuin Tampereen teknillisessä yliopistossa ensimmäisen vuoden opiskelijoille analyysin kurssilla. Kokeilun vastaavana tutkijana toimi yliopistonlehtori Petteri Harjulehto. Vastaavasti kuin Tampereellakin Turussa opiskelijoille annettiin viikoittain harjoitustehtävien ohessa yksi erikseen merkitty kielentämistehtävä, joka palautettiin kirjallisesti harjoituksissa. Turussa opiskelijoille esitettiin sama kysely kuin Tampereella, mutta ajoitus sille osui noin puoleen väliin kurssia. Tämä johtui siitä, että Turun yliopiston analyysin kurssi kesti kahden opintojakson ajan kun taas Tampereen insinöörimatematiikan kurssi oli vain yhden opintojakson mittainen. Kysely haluttiin tehdä kummassakin yliopistossa yhtä aikaa. Turussa kysely esitettiin kirjallisesti.

6.2.1 Tehtävät ja esimerkkiratkaisut

Tässä kappaleessa esitellään kaikki Turun yliopiston Analyysi 1 (syksyn 2012 toteutuskerta) kielentämistehtävät esimerkkiratkaisuineen. Kielentämistehtävät laati yliopistonlehtori Petteri Harjulehto. Alla olevassa taulukossa 3 on tehtäväkohtaiset palautusmäärät.

Taulukko 3: Turun yliopistossa tehtyjen kielentämistehtävien palautuslukumäärät

Harjoitustehtävä	Palautuksia (kpl)
1	16
2	37
3	29
4	43
5	16
6	21
7	30
8	34
9	37
10	24
11	33
12	35
13	17

Tehtäviä palautettiin vaihtelevasti. Taulukosta voidaan päätellä, että tehtävät numero 1, 5 ja 13 olivat opiskelijoille vaikeita, kun taas tehtävät 2, 4, 9 ja 12 olivat helpompia. Tässä oletetaan, että palautusten lukumäärä indikoi tehtävän vaikeustasoa. Seuraavissa kuvissa on muutama näistä vaikeista ja helpoista tehtävistä. Kaikki Turun yliopiston tutkimuksessa käytetyt kielentämistehtävät löytyvät liitteistä 6-18 kronologisessa järjestyksessä. Kielentämistehtävä oli aina tehtävänumeroltaan viikkoharjoitusten kuudes ja viimeinen tehtävä.

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)
Täydennä seuraava ratkaisu; lisää tarvittavat välivaiheet, perustelut ja loppuun yhteenveto. Keksi ratkaisulle tehtävänanto.

Ratkaisu:

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$$
$$|y| \le |x-y| + |x|$$

Tällöin

$$|x| - |y| \le |x-y| \text{ ja } -|x-y| \le |x| - |y|.$$

Todista kolmiepäyhtälön $|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$ nojalla, että epäyhtälö

$-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y|$ on tosi.

1° Oikean puolen todistus:

$|x|-|y| \le |x-y|$ Siirretään termejä, jolloin epäyhtälö saadaan muotoon

$|x| \le |x-y|+|y|$ lausutaan $|x|$ toisella tavalla, jolloin epäyhtälö tulee muotoon:

$|x| = |(x-y)+y|$

$|(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$, mikä on kolmioepäyhtälön nojalla tosi.

Oikea puoli epäyhtälöstä on siis todistettu.

2° Vasemman puolen todistus:

$-|x-y| \le |x|-|y|$ Siirretään termejä ja saadaan yhtälö muotoon

$|y| \le |x-y|+|x|$ lausutaan $|y|$ toisella tavalla jolloin epäyhtälö tulee muotoon

$|y| = |-(x-y)+x| = |x-(x-y)|$

$|x-(x-y)| \le |x|+|x-y|$, mikä on kolmioepäyhtälön nojalla tosi.

Vasenkin puoli epäyhtälöstä on siis todistettu.

Tällöin $|x|-|y| \le |x-y|$ ja $-|x-y| \le |x|-|y|$

Eli $-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y|$ □

Kuva 10: Turun 1. kielentämistehtävä

Kuvan 10 tehtävätyyppi on koodaus A, täydennys B ja ratkaisusta tehtävä D (katso liite 6). Jollain lailla samantyyppisiä tehtäviä löytyy liitteistä 8, 10, 11, ja 13. Opiskelijan vastausstrategiana on ollut päiväkirjamallin ja kommenttimallin yhdistelmä. Tässä tehtävässä tarvitaan matematiikan symbolikieltä ja luonnollista kieltä.

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)
Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Kerro *omin sanoin suomenkielellä* miten määritelmän nojalla osoitetaan, että lukujono suppenee.

6. Koska lukujono (x_n) suppenee, on olemassa jokin reaaliluku, olkoon se a, jota (x_n) lähestyy eli jota kohti se suppenee. Luku a on tällöin lukujonon raja-arvo, jota merkitään $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Ko. tilanteessa on olemassa myös sellainen etäisyys ε, joka on positiivinen reaaliluku, luvusta a, jonka jälkeen kaikki (x_n) jäsenet ovat korkeintaan ε:in päässä luvusta a. Jokaista etäisyyttä ε kohti on olemassa sellainen indeksin n arvo n_ε, joka kuuluu luonnollisiin lukuihin, jonka jälkeen kaikki (x_n) jäsenet ovat korkeintaan ε:in päässä luvusta a. Em. on voimassa vain kun $n > n_\varepsilon$.

Todistaaksemme, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua a, on etsittävä sellainen luku n_ε, että (x_n) jäsenten ja luvun a etäisyyden itseisarvo on pienempi kuin etäisyys ε. Merkitään

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Mikäli n_ε ei ole olemassa tai todistuksessa syntyy muu ristiriita, ei lukujono suppene kohti lukua a. Jos luku n_ε löytyy, suppenee lukujono kohti lukua a kaikilla n_ε suuremmilla n:n arvoilla. M.O.T.

Kuva 11: Turun 2. kielentämistehtävä

Kuvan 11 tehtävänanto on tyyppiä G eli omin sanoin selvitys (katso liite 7). Myös liitteen 12 tehtävä on tämän tyyppinen. Opiskelijan vastaus sisältää melkein pelkästään luonnollista kieltä, jolloin vastaus on lähempänä äidinkielen essee vastausta kuin perinteistä matematiikan ratkaisua. Tässä tehtävässä keskitytään luonnolliseen kieleen ja matematiikan kielen ymmärrykseen ja kääntämiseen luonnolliselle kielelle. Tehtävä vaatii opiskelijalta syvällistä perehtymistä aiheeseen.

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Täydennä todistuksen puuttuvat kohdat.

Lause *Olkoot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla on raja-arvot a ja $b \neq 0$ pisteessä x_0. Osoita, että funktiolla $\frac{f}{g} : A \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ on raja-arvo $\frac{a}{b}$ pisteessä x_0.*

Todistus. Todistetaan aluksi, että jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, niin   . Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska   , on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{1}{2}$ ja $|1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin saamme

$$|\qquad\qquad| = \frac{|f(x) - 1|}{|f(x)|} < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot 2 = \varepsilon$$

kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tämän jälkeen saadaan yleisesti

$$\qquad = \qquad = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{g(x)}{b}} = \qquad = \frac{a}{b}.$$

Olkoot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla on raja-arvot a ja $b \neq 0$ pisteessä x_0. Osoita, että funktiolla $f/g : A \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ on raja-arvo a/b pisteessä x_0

Todistus: Todistetaan aluksi, että jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, niin $||1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}\varepsilon$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{1}{2}$ ja $|1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$ Tällöin saamme

$$\left|1 - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f(x) - 1|}{|f(x)|} < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot 2 = \varepsilon$$

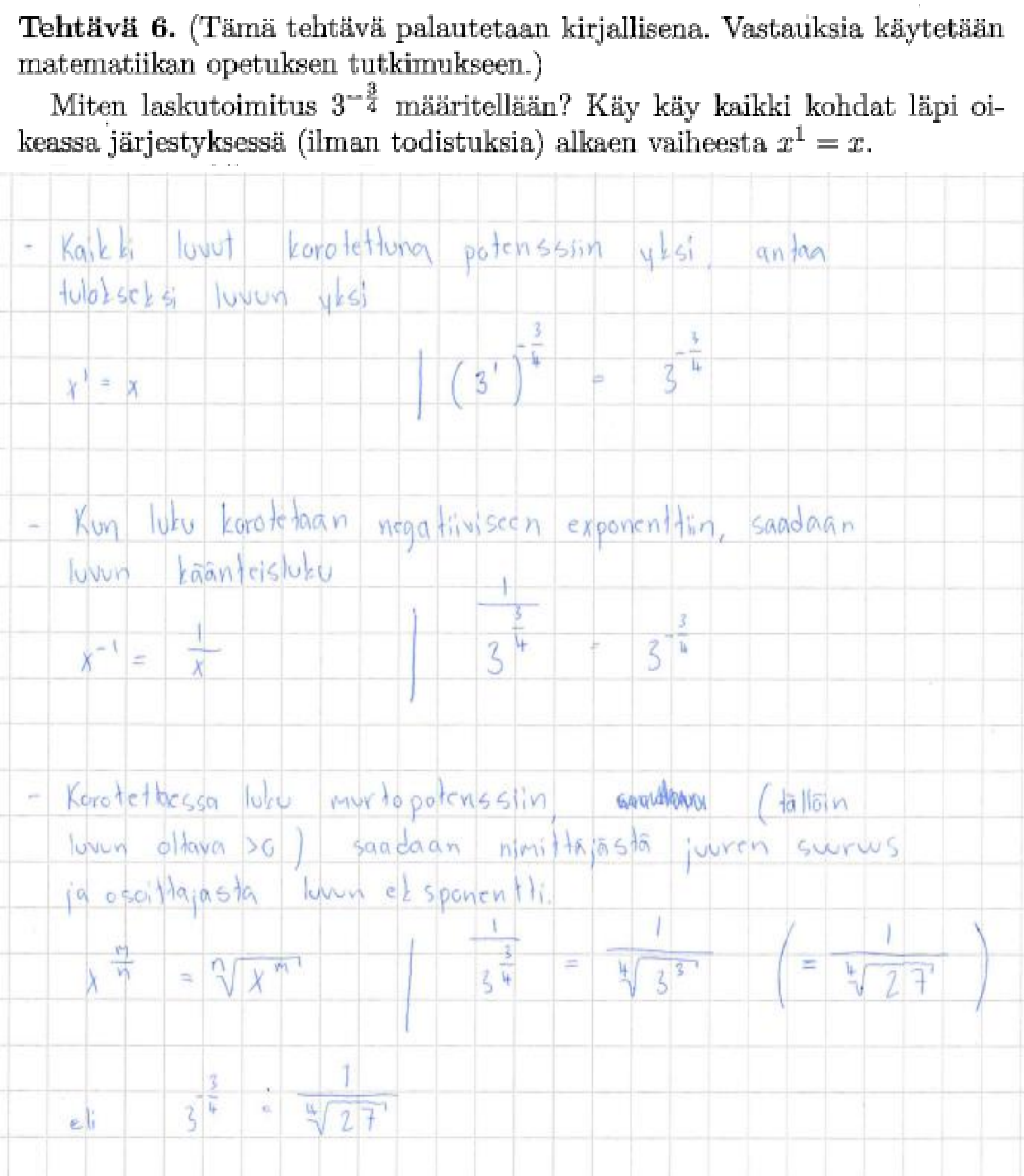
kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tämän jälkeen saadaan yleisesti

$$\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{g(x)}{b}}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot a \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1}}_{=1} = \frac{a}{b} \quad \square$$

Kuva 12: Turun 5. kielentämistehtävä

Kuvan 12 tehtävätyyppi on B. Opiskeijan ratkaisustrategia on suoraan tehtävänannon mukaisesti kertomusmallinen. Tämä tehtävänanto tukee matematiikan symbolikielen ja luonnollisen kielen käyttämistä. Tässä tehtävänannossa on jätetty tehtäväpaperiin hyvin vähän tilaa opiskelijan vastaukselle, jolloin järkevän ratkaisun tekemiseksi opiskelijan on pitänyt kirjoittaa koko todistus itse.



Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Miten laskutoimitus $3^{-\frac{3}{4}}$ määritellään? Käy käy kaikki kohdat läpi oikeassa järjestyksessä (ilman todistuksia) alkaen vaiheesta $x^1 = x$.

- Kaikki luvut korotettuna potenssiin yksi, antaa tulokseksi luvun yksi

$x^1 = x$ | $(3^1)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

- Kun luku korotetaan negatiiviseen exponenttiin, saadaan luvun käänteisluku

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

- Korotettessa luku murtopotenssiin, (tällöin luvun oltava >0) saadaan nimittäjästä juuren suuruus ja osoittajasta luvun eksponentti.

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ | $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$ $\left(= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right)$

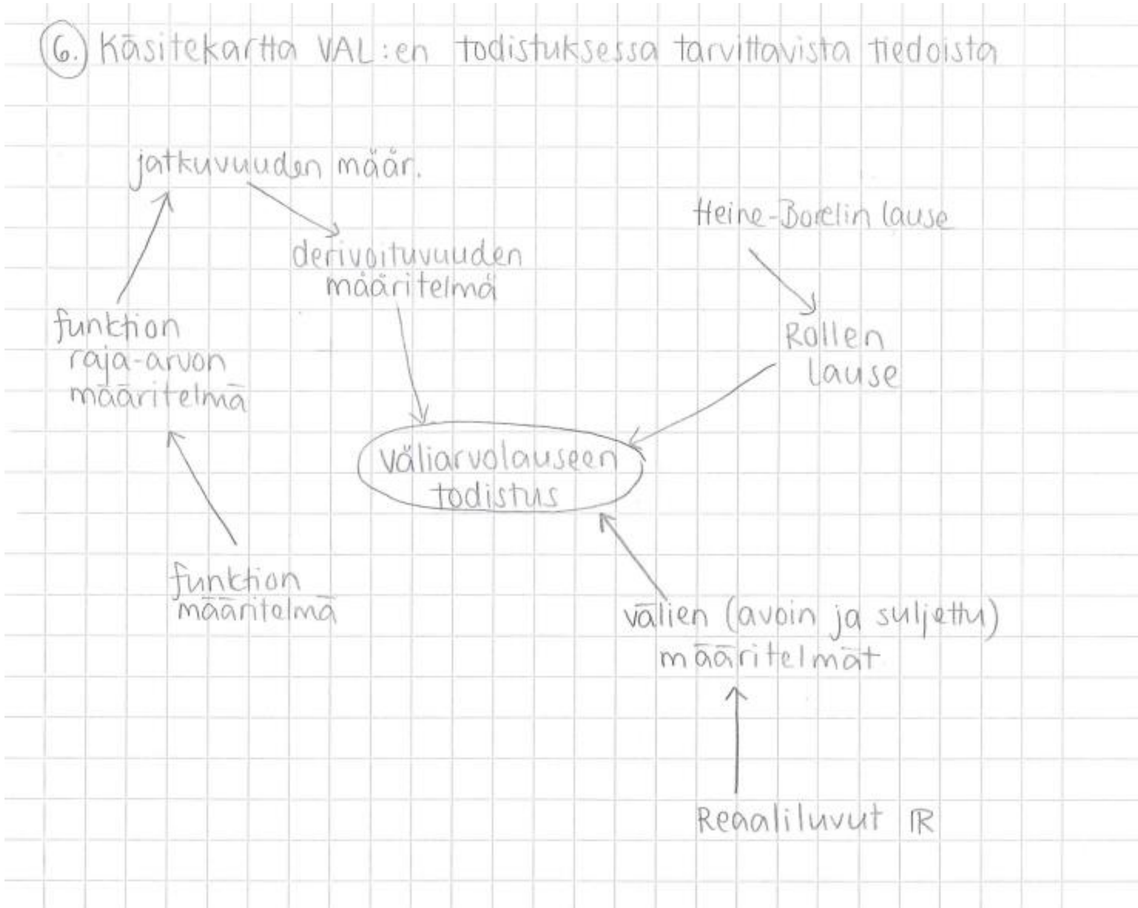
eli $3^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$

Kuva 13: Turun 9. kielentämistehtävä

Kuvan 13 tehtävänanto on tyyppiä A, E, F (tiedonseulonta) ja G. Opiskelijan vastaus on päiväkirjamallinen. Tehtävä vaatii matematiikan symbolikielen ja luonnollisen kielen käyttämistä.

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Mitä tietoja tarvitaan Väliarvolauseen todistamiseen? Piirrä käsitekartta.



Kuva 14: Turun 11. kielentämistehtävä

Kuvan 14 tehtävätyyppi on lähinnä tyyppejä F ja G eli tiedonseulonta ja omin sanoin selvitys. Tehtävän ratkaisu on matematiikalle epätyypillinen käsitekartta, jota voisi käyttää ratkaisun tiekarttana, jos tehtävä jatkuisi. Tämä tehtävä on hyvä visuaalisille oppijoille. Tehtävä vaatii syvällistä kysyttyyn asiaan perehtymistä ja tiedonjäsentelyä. Liitteessä 18 on toinen käsitekarttatehtävä. Liitteessä 17 on olevassa tehtävässä, joka on kuvan 14 tyylinen tehtävä, puolestaan pitää järjestää annetut lauseet järkevään järjestykseen, jotta lopputulos on matematiikan todistus.

6.3 Tampereen Normaalikoulu

Kielentämistä kokeiltiin myös Tampereen normaalikoulun lukiossa kevätlukukaudella 2013. Kokeiluryhmänä oli lyhyen matematiikan toinen kurssi, jonka aiheena oli geometria. Kurssin aikana kielentämiseen tutustuttiin opettajajohtoisesti siten, että opettaja oli tehnyt joitakin tehtäviä valmiiksi, jotka sitten käytiin läpi oppilaiden kanssa tarkoituksena saada oppilaat selittämään omin sanoin, mitä ratkaisussa tapahtuu. Kurssin loppupäässä oppilaille jaettiin kotiin tehtäväksi oheinen kielentämistehtävä. Tehtävän tekoon motivoitiin siten, että siitä saatavat pisteen laskettiin kurssikokeen kokonaispisteisiin. Tehtävä kerättiin ja arvosteltiin. Tämän lisäksi oppilaille pidettiin oheinen pistokoe, jonka tarkoituksena oli mitata oppimista. Pistokokeessa oli myös toinen kielentämistehtävä ja mielipidekysely kielentämisestä.

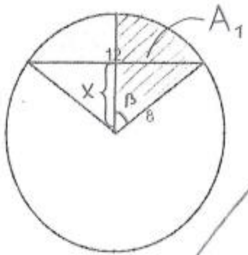
6.3.1 Tehtävät ja esimerkkiratkaisut

MAB2: Geometria

Tämä tehtävä tehdään kotona ja palautetaan tiistaina 26.3.2013. Tehtävä arvostellaan yhtenä koetehtävänä ja siitä saatavat pisteet vaikuttavat koearvosanaan. Tehtävä ratkaistaan tälle paperille.

Tehtävä 1a) Katso seuraavaa matematiikan tehtävän ratkaisua. Selitä/perustele sanallisesti mitä ratkaisun eri vaiheissa tapahtuu ja täydennä tarvittaessa kuvaa. Ratkaisussa on ainakin yksi virhe; etsi ja korjaa se (tai ne). Kirjoita ratkaisulle sopiva tehtävänanto.

Tehtävänanto: Ratkaise segmentin pinta-ala.



Ensin jaetaan sektori kahtia ja lasketaan puolikkaan sektorin keskuskulma β.

3,5/4

Sitten ratkaistaan puolikkaan sektorin pinta-ala A_1.

$\sin\beta = \frac{6}{8}$ (Mikä on β?)

$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = 48{,}59\ldots°$

Sitten ratkaistaan sivu x.

$A_1 = \frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot 8^2 = 27{,}1379865\ldots$ (Mikä ala on A_1?)

$x^2 + 6^2 = 8^2$ (Mikä on x?)

Sitten on laskettu keskipisteen ja jänteen pisteiden väliin muodostuneen tasakylkisen kolmion pinta-ala A_2.

$x^2 = 8^2 - 6^2$

$x^2 = 64 - 36$

$x^2 = 28$

$x = \sqrt{28}$

Sitten tulee virhekohta. On yritetty laskea segmentin ala A laskemalla $A_1 - A_2$, mutta se olisi pitänyt laskea $A = 2 \cdot A_1 - A_2$

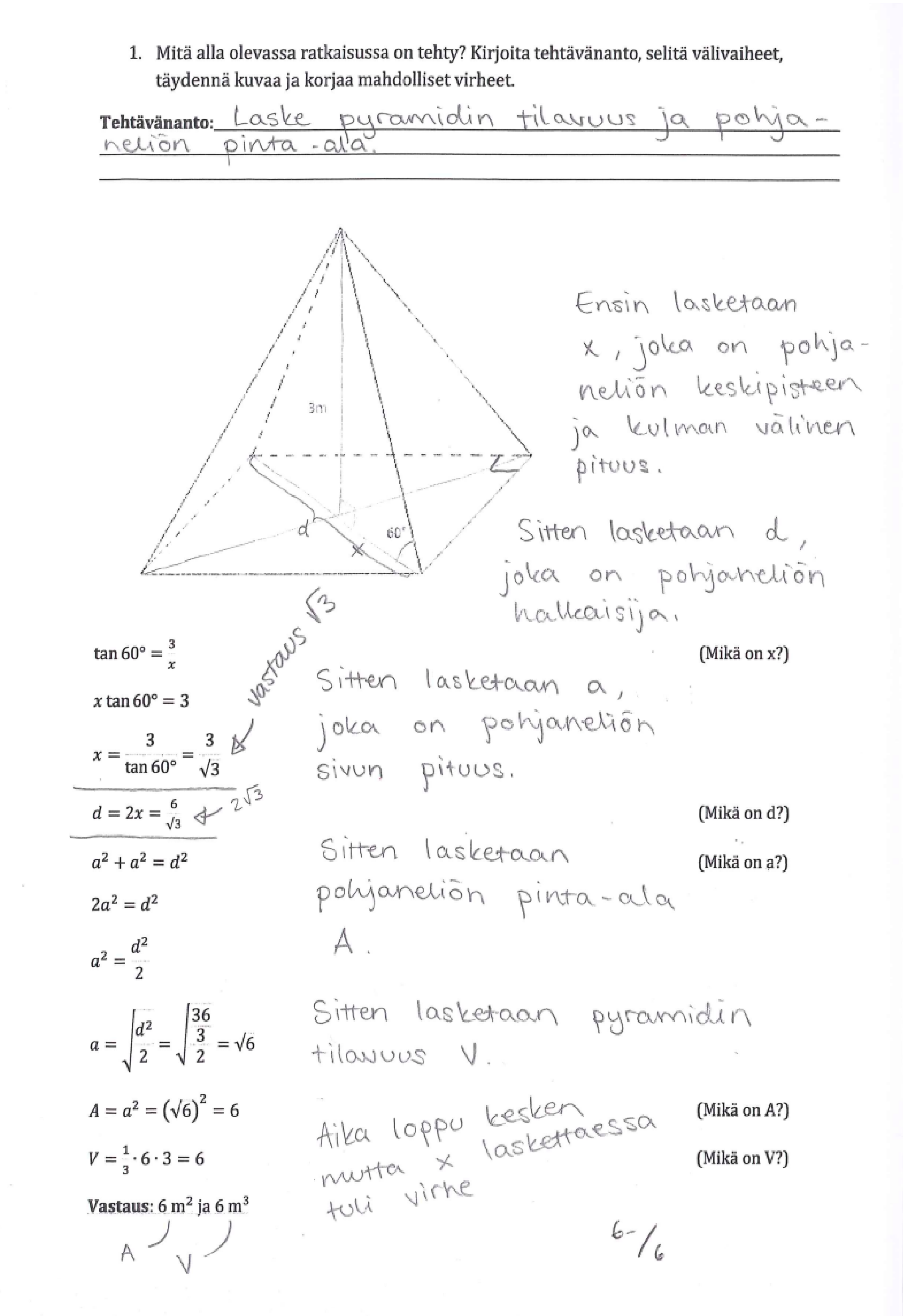
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{28} = 31{,}7490157\ldots$ (Mikä ala on A_2?)

$A = A_1 - A_2 = 27{,}1379865 - 31{,}7490157 = -4{,}6110292\ldots$ (Mikä ala on A?) segmentin pinta-ala

Vastaus: $A = -4{,}6110292\ldots$ Oikea vastaus on 22,5269573

Tehtävä 1b) Keksi käytännön trigonometrian tehtävä ja ratkaise se paperin kääntöpuolelle.

Kuva 15: Tampereen normaalikoulun 1. kielentämistehtävä.



1. Mitä alla olevassa ratkaisussa on tehty? Kirjoita tehtävänanto, selitä välivaiheet, täydennä kuvaa ja korjaa mahdolliset virheet.

Tehtävänanto: Laske pyramidin tilavuus ja pohjaneliön pinta-ala.

Ensin lasketaan x, joka on pohjaneliön keskipisteen ja kulman välinen pituus.

Sitten lasketaan d, joka on pohjaneliön halkaisija.

$\tan 60° = \frac{3}{x}$

$x \tan 60° = 3$

$x = \frac{3}{\tan 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ vastaus $\sqrt{3}$

(Mikä on x?)

Sitten lasketaan a, joka on pohjaneliön sivun pituus.

$d = 2x = \frac{6}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$

(Mikä on d?)

$a^2 + a^2 = d^2$

Sitten lasketaan pohjaneliön pinta-ala A.

(Mikä on a?)

$2a^2 = d^2$

$a^2 = \frac{d^2}{2}$

$a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{36}{3}}{2}} = \sqrt{6}$

Sitten lasketaan pyramidin tilavuus V.

$A = a^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

(Mikä on A?)

Aika loppu kesken laskettaessa mutta x tuli virhe

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 6$

(Mikä on V?)

Vastaus: 6 m² ja 6 m³

A V

6-/6

Kuva 16: Tampereen normaalikoulun 2. kielentämistehtävä.

Kuvien 15 ja 16 tehtävätyypit ovat A, B, C, D ja E. Tehtävät tukevat kaikkien matematiikan kielen osa-alueiden käyttämistä. Tehtävät on suunniteltu sellaiseksi, että oppilas oppii selittämään matematiikan tehtävän ratkaisua itselleen ja esittämään ”oikeita” kysymyksiä, kun hän lukee ratkaisua. Verrattuna niihin kielentämistehtäviin, joita kokeiltiin yliopisto-opiskelijoilla, tämä tehtävä on ohjeistavampi ja helpommin lähestyttävä lukion oppilaan näkökulmasta. Lisäksi opettajan näkökulmasta tämän tehtävän pisteyttämistä on ajateltu. Tehtävä oli oppilaille uudenlainen, vaikka heidän kanssaan on varmasti käyty läpi erilaisia matematiikan tehtävien ratkaisuja.

7 KYSELYN TULOKSIA

Tässä kappaleessa on käsitelty tutkimuksessa saatuja tuloksia. Opiskelijoiden esittämillä mielipiteillä on suuri rooli kyselyn analysoinnissa. Tampereen teknillinen yliopisto, Turun yliopisto ja Tampereen normaalikoulu on kaikki käsitelty omina kokonaisuuksinaan. Kyselylomake löytyy liitteestä 19.

7.1 Tampereen teknillinen yliopisto

Tampereen teknillisessä yliopistossa tutkittiin opiskelijoiden näkemyksiä sekä oppimistuloksia. Näkemyksiä kartoitettiin kyselyn avulla ja oppimista mitattiin tenttituloksilla sekä perustaitotestin tuloksilla. Suurin painoarvo on tutkimuksessa annettu opiskelijoiden omille mielipiteille, sillä parhaiten omasta oppimisestaan osaa kertoa opiskelija itse. Tampereen kysely järjestettiin verkossa kurssin Moodle oppimisalustassa, johon opiskelijat kirjautuivat omilla tunnuksillaan.

7.1.1 Kysely

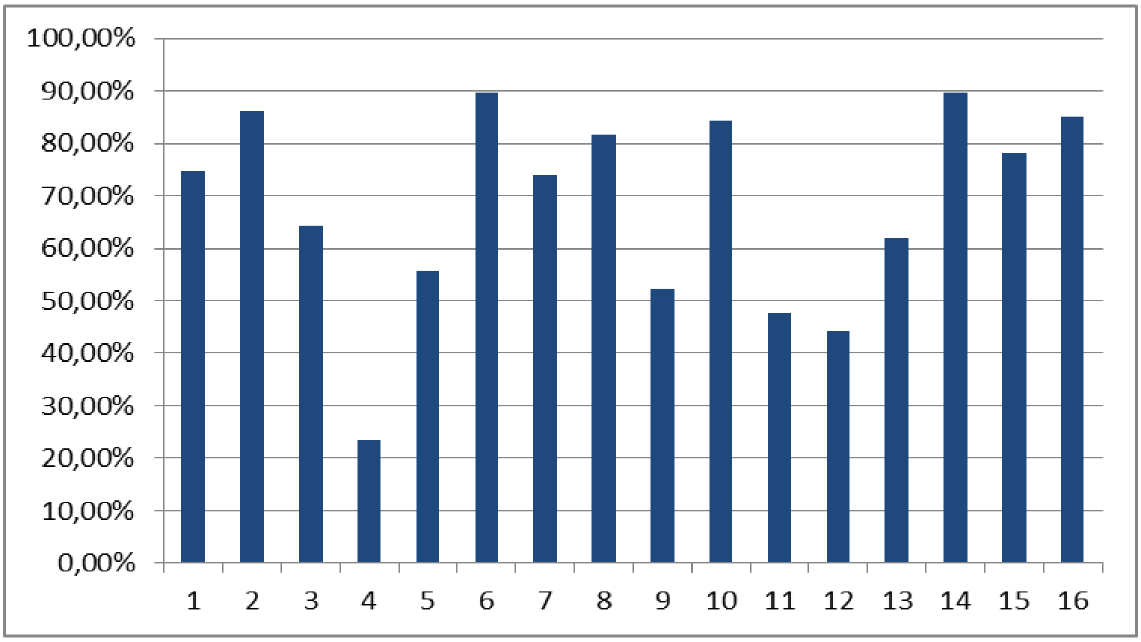
Kuudennella viikolla opiskelijoille annettiin kurssin kotisivuille sähköinen kysely kielentämistehtävistä. Kyselyssä oli 16 kysymystä, joihin vastattiin neljä portaisella Likert-asteikolla, ja kaksi avointa kysymystä. Kysely oli opiskelijoille vapaaehtoinen ja siitä tarjottiin kielentämistehtävien tavoin kaksinkertaiset bonuspisteet, mikä tietenkin houkutteli suuren määrän opiskelijoita vastaamaan kyselyyn – pari vastaajaa oli jopa sellaisia, jotka eivät olleet tehneet ainuttakaan kielentämistehtävää. Tampereen kyselyyn vastanneiden määrä oli 115.

Tässä kappaleessa on esitelty kyselyn tuloksia. Kyselyssä opiskelijoille esitettiin alla olevassa taulukossa esitellyt kysymykset, joihin vastattiin numeroilla 0-3 oman näkemyksen mukaan.

Taulukko 4: TTY:n opiskelijoiden vastauksia. (0=täysin eri mieltä, 1=jokseenkin eri mieltä, 2=jokseenkin samaa mieltä, 3=täysin samaa mieltä)

Kysymys	0	1	2	3	moodi	mediaani
1. Olen hyvä matematiikassa	0,86%	25,00%	65,52%	8,62%	2	2
2. Koen onnistuvani laskiessani matematiikan harjoitustehtäviä.	0,00%	14,66%	68,97%	16,38%	2	2
3. Osaan ratkaista vaikeitakin matematiikan tehtäviä	3,45%	32,76%	59,48%	4,31%	2	2
4. Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin muille.	18,97%	57,76%	20,69%	2,59%	1	1
5. Pidän sanallisista tehtävistä	7,76%	37,07%	47,41%	7,76%	2	2
6. Sanalliset tehtävät ovat mielestäni hyödyllisiä.	0,00%	11,21%	50,86%	37,93%	2	2
7. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	8,62%	18,10%	50,86%	22,41%	2	2
8. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	3,45%	15,52%	51,72%	29,31%	2	2
9. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	3,45%	44,83%	43,97%	7,76%	1	2
10. Kirjoittaminen sanallisesti auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin.	3,45%	12,93%	51,72%	31,90%	2	2
11. Matematiikassa vaikeinta on kirjoittaa ajatukset matemaattisessa muodossa.	6,03%	46,55%	36,21%	11,21%	1	1
12. Kun ratkaisen matematiikan tehtävää, teen ajatustyön päässäni enkä kirjoita paperille kuin välttämättömän.	12,07%	43,97%	32,76%	11,21%	1	1
13. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	3,45%	35,34%	42,24%	18,97%	2	2
14. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,86%	10,34%	38,79%	50,00%	3	2,5
15. Olen valmis käyttämään pitkänkin aikaa matematiikan tehtävän ratkaisuun.	3,45%	18,97%	51,72%	25,86%	2	2
16. Opettajan on helpompi arvioida sellaista tehtävää, jossa on käytetty luonnollista kieltä ja kommentointia. Tällaisesta ratkaisusta näkee, onko laskija ymmärtänyt aiheen.	1,72%	13,79%	53,45%	31,03%	2	2

Opiskelijoiden vastauksista voitiin piirtää seuraava kuvio:



Kuvio 1: Opiskelijoiden vastaukset kysymyksiin 1-16. Vaaka-akselilla on kysymysnumero ja pystyakselilla samaa mieltä olevien opiskelijoiden vastausten prosenttiosuus kaikista vastaajista

Kuviosta voidaan nähdä, että opiskelijat pitivät yleisesti sanallisia tehtäviä hyödyllisinä, vaikkeivät välttämättä olleetkaan yhtä innoissaan niiden tekemisestä. He olivat selvästi sitä mieltä, että luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävien ratkaisuissa helpotti oppimista ja tehtävien lukemista. He olivat myös sitä mieltä, että opettajan on helpompi lukea opiskelijan tehtävän ratkaisua, kun sitä on perusteltu käyttäen luonnollista kieltä. Opiskelijat olivat valmiita käyttämään aikaa matematiikan ratkaisujen tekemiseen ja he myös kirjoittivat ajatuksiaan paperille. Kuitenkin sanallisten perustelujen kirjoittaminen oli puolelle opiskelijoista heidän mielestään vaikeaa.

Nämä 16 kysymystä voidaan jakaa sisällön perusteella viiteen ryhmään. Nämä ryhmät on esitelty taulukossa 5:

Taulukko 5: Kysymysten jako sisällön perusteella

Ryhmän kuvaus	**Ryhmään liittyvien kysymysten numerot**
Matematiikan taidot ja motivaatio	1,2,3,4,15
Sanalliset tehtävät	5,6
Luonnollisen kielen käyttäminen	7,8,9,10
Matemaattisen symbolikielen käyttäminen	11,12,13
Kielentämisen hyödyllisyys	14,15

Taulukon 5 ryhmien sisällä oli odotusten mukaista korrelaatiota. Opiskelijoiden vastauksista Matlabilla laskettu korrelaatiokerroinmatriisi sekä p-arvomatriisi kysymysten 1-

16 välille löytyy liitteestä 22. Ensimmäisessä ryhmässä kysymysten vastauksista voitiin päätellä, että opiskelijat pitivät matematiikan taitojaan suhteellisen hyvinä. He kokivat osaavansa ratkaista vaikeitakin tehtäviä ja olivat valmiita käyttämään paljon aikaa matematiikan tehtävän ratkaisuun. Toisen ryhmän kysymysten välillä ei ollut kovin vahvaa korrelaatiota ($r = 0,43$, $p = 0,5663$). Opiskelijat pitivät sanallisia tehtäviä hyödyllisinä, mutta eivät silti pitäneet niin paljoa niiden ratkaisemisesta. Kolmannessa ryhmässä kysymykset 8 ja 10 korreloivat vahvasti ($r = 1,00$, $p = 0,0045$), kuten odottaa saattoi. Luonnollinen kieli ilmeisesti on opiskelijoiden mielestä hyödyllistä, mutta ei niin helppoa käyttää. Kysymysten 9 ja 11 välillä oli myös vahva korrelaatio ($r = 0,98$, $p = 0,0210$). Luonnollinen kieli ja sen käyttäminen voi olla haastavaa matemaattiseen kieleen orientoituneelle ja päinvastoin tai toisaalta sellaiselle, jolle matemaattisen muodon esittäminen tuntuu helpolta, myös luonnollisella kielellä kommentointi onnistuu. Viidennen ryhmän kysymysten perusteella voitiin sanoa, että opiskelijat olivat valtaosin sitä mieltä, että luonnollisella kielellä kommentoitua ratkaisua on helpompi ymmärtää sekä opettajan että oppilaan näkökulmasta.

Edellä olevien kysymysten lisäksi opiskelijoille esitettiin seuraavat kaksi avointa kysymystä:

17. Kerro vapaasti miten suhtaudut epämuodollisen luonnollisen kielen käyttöön matematiikan tehtävien ratkaisuissa? Miten voisit itse hyödyntää sitä omissa ratkaisuissasi?

18. Kerro vapaasti mitä sait irti kurssin aikana ratkaisemistasi kielentämistehtävistä?

Taulukossa 6 on joitakin opiskelijoiden vastauksia edellä oleviin kysymyksiin. Vastauksia ei ole eritelty kysymysten mukaan, koska vastaukset olivat hyvin samankaltaisia molempiin kysymyksiin.

Taulukko 6: TTY:n opiskelijoiden vastauksia avoimiin kysymyksiin. (ensimmäisessä sarakkeessa on tutkimuksen avuksi opiskelijoille jaetut tunnistusluvut)

1TTY3	*"Minusta se on hyvä asia, kunhan se vain pysyy maltillisena. Koska jos tehtävässä on hirmuisesti tekstiä, itse lasku saattaa jäädä epäselväksi. Pidän selkeistä esitystavoista ja siihen kuuluu myös tekstiä."*
1TTY1	*"Pidempien laskujen ratkaisemisessa menetelmästä on varmasti hyötyä, kun pysyy kokoajan tietoisena siitä, mitä on tekemässä. Omalta kohdaltani voin sanoa että pidin kielentämistehtävistä ja tulen käyttämään tekniikkaa myöhemminkin."*
1TTY7	*"Se selkeyttää jäsentämään vastausta niin, että siitä on minulle jotain iloa jälkikäteen esimerkiksi tenttiin kertaamisessa. Itse tehtävän ratkaisemisessa siitä on ainakin sellainen apu, että selkeästi näkee mitä on jo tehty ja mitä mahdollisesti pitää seuraavaksi tehdä."*
1TTY13	*"Mielestäni se on erinomainen tapa, sillä matematiikassa ei ole mielestäni oleellisinta*

	saada tietyt merkinnät prikulleen oikein, vaan asian ymmärtäminen. Voisin koittaa enemmän miettiä asioita myös luonnollisen kielen kautta.”
1TTY24	*”Mielestäni sitä on PALJON helpompi lukea kuin matemaattisia merkintöjä. Matemaattiset merkinnät on tietysti hyvä osata, mutta ainakin minun on helpompi ymmärtää itse asia helpommin, jos minun ei tarvitse miettiä yksi kerrallaan mitä mikäkin merkki tarkoittaa.”*
1TTY30	*”Kyseistä asiaa rajoitettiin mielestäni melko paljon lukiossa ylioppilaskirjoituksiin valmistautuessa, joten on ollut melko kiva tehdä kielentämistehtäviä. Tehtävät ymmärtää helpommin kun on kirjoittanut välivaiheiden selityksiä. Tehtäviin on myös helpompi palata myöhemmin, vaikka ei muistaisi aihealuetta niinkään selkeästi.”*
2TTY50	*”Yhteenvetona sanoisin: lisää kielentämistehtäviä! Erityisesti sellaisia, joissa pitää selittää mitä jokin tarkoittaa (esim. funktio) ja laskea aiheeseen liittyvä tehtävä (ei sieltä vaikeimmasta päästä) selittäen samalla. Kielentämistehtävät voisivat olla ns. ymmärrä asia paremmin tehtäviä. (Harjoitustehtävissähän vain lasketaan lähinnä.)”*
2TTY48	*”Kielentämistehtävät laittoivat esittämään matemaattisia asioita omien sanojen mukaisesti, jolloin väkisinkin joutui kääntämään matemaattisen asian uudestaan omien sanojensa muotoon. Tämä auttoi ymmärtämään asioita paremmin.”*
2TTY19	*”Monta kertaa kurssilla oli sellainen tilanne, että harjoitustehtävästä ei tajunnut mitään, eikä harkkojen tarkistuksesta tajunnut mitään. Vasta "kielentämistehtävämäisistä" malliratkaisuista ymmärtää, mitä tehtävässä oikeasti tehtiin ja miksi. Kannatan!”*
2TTY25	*”En oikeastaan pitänyt kielentämistehtävistä: en useinkaan jaksanut kirjoitella kaikkia ajatuksiani paperille (laiska mikä laiska). Olisin ehkä pitänyt enemmän tavallisesta, hieman haastavammasta tai laajemmasta laskutehtävästä.”*
2TTY9	*”Oli "pakko" perehtyä asioihin paremmin, kun kielentämistehtävissä pitää kuitenkin yleensä ymmärtää asia paremmin, kuin mitä pelkän laskun ratkaiseminen vaatii. Itselleni kielentämistehtävät selvensivät paria sellaista asiaa, jotka olivat jääneet luennolla vähän hämärän peittoon, kun piti itse etsiä tietoa ja sitten kirjoittaa asia omin sanoin. Eli mielestäni kielentämistehtävät olivat hyödyllisiä ja toivottavasti niitä on jatkossakin.”*
2TTY1	*”Kielentämistehtäviä oli helppo katsoa jälkikäteen kavereiden kanssa, kun pystyi seuraamaan mitä itse oli kussakin välivaiheessa ajatellut.”*

Yleisesti opiskelijoilla oli erittäin myönteiset käsitykset kielentämisestä ja monet aikoivat käyttää sitä tulevaisuudessakin. Kielentämistehtävät koettiin hieman suurempitöisinä kuin tavalliset tehtävät mutta kuitenkin ehdottomasti hyödyllisinä.

Huomioitavaa on, että molemmissa yliopistoissa kielentämiskokeilu tehtiin ensimmäisen vuoden peruskurssilla. Kokeiluun osallistuneet opiskelijat olivat siis juuri aloittaneet opiskelun yliopistossa (ainakin suurin osa opiskelijoista) eivätkä he olleet vielä tottuneet yliopistotason matematiikkaan. Monet tulivat suoraan lukiosta ja niin kutsutun matematiikkakuilun ylittäminen lukiomatematiikasta yliopistomatematiikkaan oli haastavaa. Siksi osallistuminen opetuskokeiluun ja ”uuden” opetus-/oppimismetodin kokeileminen saattoi olla hämmentävää.

Mielenkiintoista avointen kysymysten vastauksista oli huomata se, että kielentäminen oli valtaosalle opiskelijoista täysin vieras käsite. Tietenkin osaltaan tähän vaikuttaa sanan ”kielentäminen” käyttäminen, mutta muutenkin opiskelijoiden vastauksista kävi ilmi se, että luonnollisen ja matematiikan kielen sekoittaminen matematiikan tehtävien ratkaisuissa oli vierasta. Jotkut opiskelijat jopa ilmoittivat, ettei lukiossa saanut käyttää luonnollista kieltä matematiikan tehtävien ratkaisuissa lainkaan. Tämä tosin oli hyvin harvinaista. Monet tunsivat luonnollisen kielen käyttämisen olevan haastavaa vaikkakin hyödyllistä.

Luonnollisen kielen käyttäminen nähtiin eräänlaisena primitiivisenä alkuaskeleena matematiikan tehtävän ratkaisussa. Luonnollisen kielen käyttämisellä nähtiinkin olevan lähinnä välinearvo syvemmän ymmärtämisen saavuttamiseen ja pelkän matematiikan symbolikielen sujuvaan käyttämiseen; mitä vähemmän tarvitsee selitellä välivaiheita luonnollisella kielellä sitä paremmin osaa matematiikkaa. Matematiikka nähdään siis täysin omana kielenään, eikä sitä voi osata kunnolla, jos ei osaa ilmaista itseään puhtaasti matematiikan symbolikielen avulla. Luonnollista kieltä ei nähdä matematiikan kielen osana. Jos luonnollinen kieli olisi esitelty opiskelijoille matematiikan kielen eräänä osa-alueena kuvio- ja symbolikielen rinnalla, olisivat mielipiteet voineet olla erilaisia. Nyt kielentämistehtävät oli eroteltu muista tehtävistä hyvin selkeästi, mikä osaltaan erotti sen ”tavallisesta” matematiikan tehtävästä. Muun muassa tästä johtuen sellaisille opiskelijoille, joille matematiikan symbolikieli on helppoa, kielentämisestä ei ollut iloa. Heille kielentämistehtävät tuntuivat varmasti turhaa työtä aiheuttavilta ja liikaa aikaa vieviltä.

Edellä mainitun näkökulman vastapainona oli se, että useiden opiskelijoiden mielestä luonnollisella kielellä selittäminen mittasi asian todellista ymmärtämistä. Tämä nähtiin hyvänä asiana; ei riitä, että opettelee ulkoa matemaattiset kaavat ja algoritmit, pänttää malliratkaisuja ja opettelee esimerkkitehtävien avulla, vaan on tajuttava asia syvällisesti.

Monet opiskelijat käyttivät sanaa ”pakko”, kun he kuvailivat kielentämistehtävistä saatuja hyötyjä. Oli ”pakko” opetella, ”pakko” ymmärtää ja ”pakko” käyttää aikaa. Kielentämistehtävät pakottivat opiskelijat avaamaan ajatuksiaan ja kertomaan, mitä ratkaisussa tapahtuu. Heidän oli pakko asettua lukijan ja opettajan asemaa. Heidän oli pakko ajatella opittavaa asiaa toisesta näkökulmasta. Tämä pakottaminen oli opiskelijoiden mielestä hyvä asia ja auttoi oppimaan. ”Pakko” on siis tässä kirjoituksessa positiivinen sana sekä opettaja että opiskelijan näkökulmasta.

Opiskelijoiden vastauksissa toistui se, että tehtävän selittäminen ja kommentointi luonnollisella kielellä auttoi ymmärtämään asiaa syvällisemmin. Hyvin kommentoitua tehtävänratkaisua on helpompi lukea myöhemminkin ja ratkaisumallin kärryille on helpompi päästä. Tämän takia monet opiskelijat aikoivat hyödyntää kielentämistä tulevaisuudessakin – esimerkiksi tenttiin kerrattaessa.

Kielentämistehtävät olivat opiskelijoiden mielestä vaikeampia kuin ”tavalliset” laskuharjoitustehtävät. Tähän vaikutti osaltaan se, että tehtävätyypit eivät olleet tyypillisiä ja aikaisemmissa matematiikan opinnoissa tuskin on painotettu selittämisen ja luonnollisen kielen tärkeyttä. Matematiikka nähdään usein siten, että tehtävä on ratkaistu, kun oikea numeroarvo saadaan paperille. Vastaus on tärkeämpi kuin ratkaisu. Kielentämistehtävissä saatettiin kääntää asiat täysin päälaelleen; ratkaisu annettiin ja kysyttiin kysymyksen asettelua, tai annettiin ratkaisu, josta piti hakea virhe tai perustella välivaiheet jne. Nämä mittasivat asian ymmärtämistä ja sisäistämistä ja vaativat opiskelijalta enemmän ajattelutyötä. Ajatteluntyön lisääntyminen puolestaan vaatii enemmän aikaa ja kokonaistyötä, joten monet opiskelijat myönsivät, että suuremman työmäärän vuoksi kielentämistehtävät eivät olleet mieluisia.

Kokonaisuudessaan opiskelijoiden palaute oli hyvin positiivista. Kielentämistehtävät olivat heidän mielestään hyödyllisiä, joskin vaivaloisia. Negatiivista palautetta tuli lähinnä siitä, että ei ymmärretty tehtävänantoa tai tehtävä oli liian vaikea. Joidenkin opiskelijoiden mielestä kielentäminen oli ajanhukkaa mutta valtaosa näki metodissa ideaa. Tosin motivaation riittäminen kaiken sen vaivan eteen, mitä syvällinen oppiminen tarvitsisi, on asia erikseen.

Kenelle kielentämistehtävistä on hyötyä? Monien opiskelijoiden mielestä kielentämistehtävät mittasivat asian todellista ymmärtämistä ja auttoivat sisäistämään opittavaa asiaa paremmin, kun oli ”pakko” selvittää itselleen mistä oikeasti on kyse. Kielentämistehtävät siis kannustavat syvälliseen oppimiseen – asian todelliseen sisäistämiseen. Pintamotivoituneelle opiskelijalle kielentämistehtävä voi puolestaan olla enemmänkin oppimista haittaava, koska ei riitä, että opettelee tietyn ratkaisumallin ulkoa. Kielentämisen vaatiminen tällaiselta opiskelijalta voi sekoittaa ja hämmentää. Oppimisprofiileita ajatellen kielentämistehtävistä voi olla hyötyä jokaiselle oppimisprofiilityypille. Osaajat tuskin hyötyvät kielentämistehtävistä samalla tavalla kuin muut.

Kielentämistehtävät sopivat hyvin etenkin auditiivisille sekä kinesteettisille oppijoille. Tehtävissä pitää selittää ja avata ajatuksia itse, mikä tarkoittaa oman ajattelutavan etsimistä ja kehittämistä. Lisäksi ajatusten kirjoittaminen omin sanoin tukee auditiivisuutta. Jos tehtävässä painotetaan kuviokieltä, sopii se visuaalisille oppijoille. Näin ollen kielentämistehtävillä voidaan tukea kaikkia oppimistyylejä.

7.1.2 Tulokset perustaitotestistä ja tentistä sekä profiilijakaumat

Tässä kappaleessa eritellään vielä Tampereen teknillisen yliopiston Insinöörimatematiikka 1C –kurssin opiskelijoiden tenttien arvosanoja, perustaitotestien arvosanoja ja profiilijakaumia verrattuna siihen, kuinka paljon opiskelija teki kielentämistehtäviä. Seuraavaan taulukkoon 7 on listattu kaikki nämä tiedot.

Taulukko 7: Numerodataa Insinöörimatematiikka 1 C –kurssilta. Profiilijakauman avain: 1=pintasuuntautunut, 2=vertaisoppija, 3=tukea tarvitseva, 4=omin päin opiskeleva, 5=osaaja. Viimeisellä rivillä on kaikki ne opiskelijat, jotka palauttivat kielentämistehtäviä – myös ne, joilla oli joitakin puutteita tiedoissa.

Palautettuja kielentämistehtäviä	Opiskelijoiden lukumäärä	Ryhmän keskiarvo tentissä (max 5)	Profiilijakauman moodi	Perustaitotestin keskiarvo (max 16)
1	29	2,03	2	8,38
2	22	2,41	5	8,41
3	19	2,26	2	8,37
4	12	2,58	2	8,00
5	17	2,82	2	9,47
Kaikki kielentämistehtäviä palauttaneet	111	2,32	2	8,47

Taulukosta 7 voidaan nähdä, että yhden tehtävän palauttaneiden ja viiden tehtävän palauttaneiden välillä on eroa arvosanoissa ja perustaitotestin tuloksissa. Voidaan sanoa, että jälkimmäiset ovat jo lähtötasoltaan parempia kuin edelliset ja myös arvosanat noudattavat tätä. Kuitenkin neljän tehtävän palauttaneiden rivi on mielenkiintoinen. Heidän lähtötasonsa oli perustaitotestin perusteella selvästi huonoin, mutta tenttituloksissa tämä ryhmä oli toiseksi paras. Arvosanojen välillä ei ole kovin suurta eroa; neljä ja viisi tehtävää palauttaneet opiskelijat saivat hieman keskivertoa parempia arvosanoja. Profiilijakaumaltaan suurin osa kielentämistehtävien tekijöistä on selvästi vertaisoppijoita. Kahden tehtävän palauttaneiden joukossa näyttäisi olevan paljon osaajia.

Millaiset opiskelijat eivät pitäneet kielentämistehtävistä? Taulukkoon 8 on kerätty yksityiskohtaisempia tietoja opiskelijoista, jotka kyselyn mukaan pitivät kielentämistä hyödyllisenä tai tehtävää helpottavana. Tätä varten taulukossa 8 on analysoitu seuraavia kyselyn väittämiä:

8. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.
10. Kirjoittaminen sanallisesti auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin.

Nämä edellä olevat kaksi väittämää kuvaavat parhaiten vastaajan mielipidettä kielentämisen mielekkyydestä ja hyödyllisyydestä.

Taulukko 8: Kysymyksen 8 ja 10 taulukoituja arvoja. Profiilijakauman avain: 1=pintasuuntautunut, 2=vertaisoppija, 3=tukea tarvitseva, 4=omin päin opiskeleva, 5=osaaja.

	Opiskelijoiden lukumäärä	Keskiarvo ten-tistä (max 5)	Profiilijakauman moodi	Perustaitotestin keskiarvo (max 16)
väittämän 8 kanssa samaa mieltä	85	2,24	2	8,29
väittämän 8 kanssa eri mieltä	22	2,27	1	7,91
väittämän 10 kanssa samaa mieltä	89	2,29	2	8,45
väittämän 10 kanssa eri mieltä	18	2,00	1	7,06
muut opiskelijat (eivät vastanneet kyselyyn)	74	2,47	2	8,77

Oli mielenkiintoista, että sellaiset opiskelijat, jotka vastasivat väittämään 8 olevansa täysin samaa mieltä, saattoivat samalla vastata väittämään 10 olevansa täysin eri mieltä. Tämän kaltaisia vastausyhdistelmiä oli muutamia, joten väittämät on käsitelty omina kokonaisuuksinaan. Taulukosta voidaan nähdä, että väittämän 8 kanssa samaa mieltä olevat olivat lähtötasoltaan hieman eri mieltä oleviin verrattuna parempia, mutta tenttituloksetaan heikompia. Väittämän 10 kanssa samaa mieltä olevien lähtötaso ja tenttitulos olivat eri mieltä oleviin verrattuna hieman parempia. Erimieltä olevien opiskelijoiden moodi oli kummassakin väittämässä 1 eli pintasuuntautunut. Väittämien kanssa samaa mieltä olevien opiskelijoiden joukon moodi oli 2 kuten myös kyselyyn osallistumattomien moodi. Niiden opiskelijoiden, jotka eivät vastanneet kyselyyn, lähtötaso ja tenttitulos olivat hieman parempia.

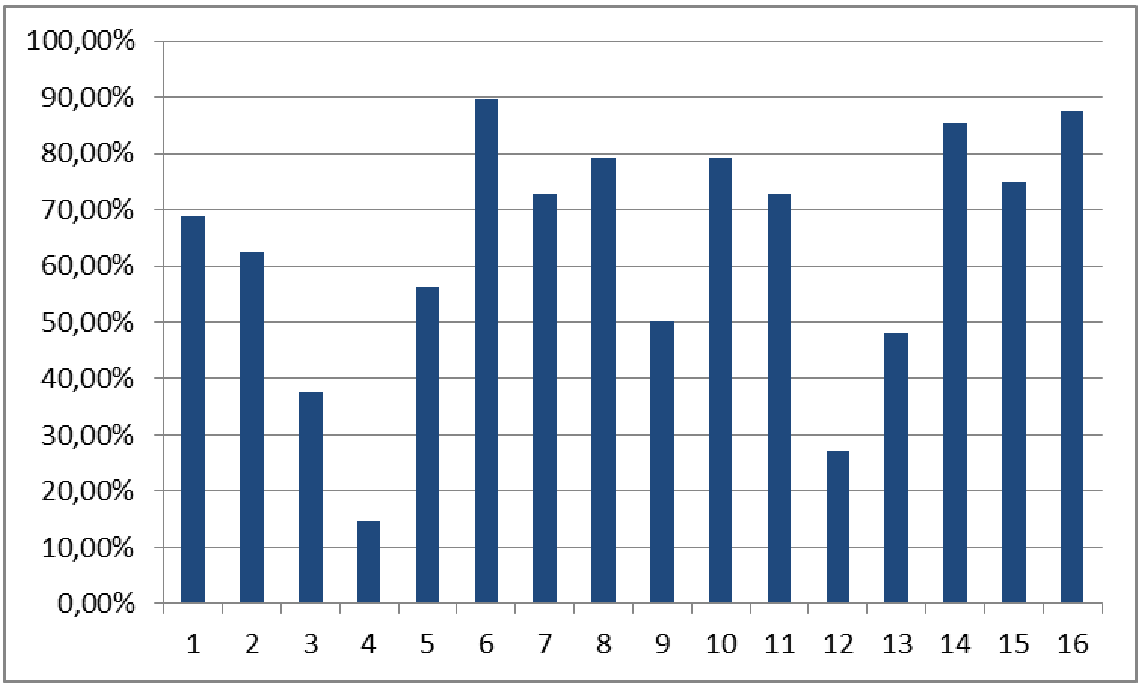
7.2 Turun Yliopisto

Tässä kappaleessa eritellään Turun yliopistossa tehdyn kyselyn tuloksia. Kysely mittaa opiskelijoiden omaa näkemystä taidoistaan matematiikassa sekä mielipiteitä kielentämistehtävistä ja niiden hyödyllisyydestä.

Taulukko 9: Opiskelijoiden vastauksia. (0=täysin eri mieltä, 1=jokseenkin eri mieltä, 2=jokseenkin samaa mieltä, 3=täysin samaa mieltä)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	Mediaani
1. Olen hyvä matematiikassa	4,17%	27,08%	60,42%	8,33%	2	2
2. Koen onnistuvani laskiessani matematiikan harjoitustehtäviä.	2,08%	35,42%	54,17%	8,33%	2	2
3. Osaan ratkaista vaikeitakin matematiikan tehtäviä	12,50%	50,00%	35,42%	2,08%	1	1
4. Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin muille.	20,83%	64,58%	14,58%	0,00%	1	1
5. Pidän sanallisista tehtävistä	8,33%	35,42%	52,08%	4,17%	2	2
6. Sanalliset tehtävät ovat mielestäni hyödyllisiä.	2,08%	8,33%	72,92%	16,67%	2	2
7. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	4,17%	22,92%	45,83%	27,08%	2	2
8. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	2,08%	18,75%	35,42%	43,75%	3	2
9. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	10,42%	39,58%	47,92%	2,08%	2	1,5
10. Kirjoittaminen sanallisesti auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin.	2,08%	18,75%	43,75%	35,42%	2	2
11. Matematiikassa vaikeinta on kirjoittaa ajatukset matemaattisessa muodossa.	2,08%	25,00%	39,58%	33,33%	2	2
12. Kun ratkaisen matematiikan tehtävää, teen ajatustyön päässäni enkä kirjoita paperille kuin välttämättömän.	29,17%	43,75%	16,67%	10,42%	1	1
13. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	6,25%	45,83%	41,67%	6,25%	1	1
14. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,00%	14,58%	41,67%	43,75%	3	2
15. Olen valmis käyttämään pitkänkin aikaa matematiikan tehtävän ratkaisuun.	4,17%	20,83%	54,17%	20,83%	2	2
16. Opettajan on helpompi arvioida sellaista tehtävää, jossa on käytetty luonnollista kieltä ja kommentointia. Tällaisesta ratkaisusta näkee, onko laskija ymmärtänyt aiheen.	0,00%	12,5%	50,00%	37,50%	2	2

Taulukosta 9 voitiin piirtää seuraava kuvio. Kuvion pylväät esittävät niiden opiskelijoiden prosentuaalista osuutta, jotka vastasivat olevansa jokseenkin samaa mieltä tai samaa mieltä.



Kuvio 2: Turun opiskelijoiden vastaukset kysymyksiin 1-16 (N=48) Vaaka-akselilla on kysymysnumero ja pystyakselilla samaa mieltä olevien opiskelijoiden vastausten prosenttiosuus kaikista vastaajista

Kuvio vastaa hyvin paljon Tampereen teknillisen yliopiston vastaavaa kuviota. Vain kolmessa kysymyksessä voidaan huomata eroa. Kysymyksessä 3, jossa väite on ”osaan ratkaista vaikeitakin matematiikan tehtäviä”, Turun opiskelijat eivät olleet samaa mieltä. Heidän itsetuntonsa matematiikan osaajina ei siis ollut yhtä hyvä kuin Tampereen opiskelijoilla. Tämä on sinänsä mielenkiintoista, sillä Turussa opiskelijat olivat matematiikan pääaineopiskelijoita, kun taas Tampereella pääaineena ei kellään ollut matematiikka. Ero vastausten välillä selittyneekin matematiikan kurssien vaikeustasoilla. Tampereella ensimmäinen insinöörimatematiikan kurssi kertaa ja syventää lukiomatematiikkaa. Turussa kurssin aihe oli analyysi, joka on oletettavasti juuri yliopistossa aloittaneelle matematiikan opiskelijalle suhteellisen vaikeaa, sillä se eroaa lukiossa opitusta hyvin paljon. Voi olla, että tämän takia Turun opiskelijoiden itsetunto matematiikan osaajina laski kurssin aikana.

Myös kysymyksessä 11 oli eriävyyttä Tampereen vastausten kanssa. Turussa opiskelijoiden mielestä ajatusten kirjoittaminen matemaattisessa muodossa on vaikeaa. Suurin osa opiskelijoista myös ilmoittaa tekevänsä ajatustyötä paperilla. Tampereella pienempi osa opiskelijoista vastasi samoin. Nämäkin eroavaisuudet selittynevät edellä mainituilla syillä.

Taulukossa 10 on Turun yliopiston opiskelijoiden joitakin kommentteja kielentämistehtävistä. Niitä on kerätty kahden avoimen kysymyksen vastauksista.

Taulukko 10: Turun yliopiston opiskelijoiden vastauksia avoimiin kysymyksiin. (ensimmäisessä sarakkeessa on tutkimuksen avuksi opiskelijoille jaetut tunnistusluvut)

1TY2	*"No siis. Omalla tavallaan se on melko hankalaakin, mutta tehtävästä tulee kyllä paljon helppolukuisempi silloin. Joskus se myös helpottaa tehtävän ratkaisua."*
1TY8	*"Suhtaudun luonnolliseen kieleen hyvin. Pyrin käyttämään sitä itsekin mahd. paljon ratkaisuissani. Erityisesti on hyvä kun esimerkeissä ja muistiinpanoissa käytetään luonnollista kieltä. Usein lisään omia huomautuksia ymmärtääkseni paremmin."*
1TY16	*"Jos ei ymmärrä matemaattista kieltä hyvin, siitä voi olla hyötyä ymmärtämisessä, mutta jos osaa käyttää matemaattista kieltä, niin se on toisaalta turhaa. Omissa ratkaisuissa voisi hyödyntää niin, että käyttää sitä jotta huomaisi tajuaako oikeasti asian, vai onko vain opetellut matemaattisen "kaavan" ulkoa."*
1TY21	*"Ihan mielenkiintoinen ja uusi näkökulma matematiikan tehtävien ratkaisemiseksi. Itselleni siitä ainakin on ollut apua selventämään joitakin todistuksia. Omissa ratkaisuissani ajatusten kirjoittamine paperille on ainakin myöhemmin lukiessani selventänyt ajatuksia."*
1TY26	*"Itse pyrin tekemään asiat ns. oikein eli matemaattisesti JA selittämään vieressä suomenkielellä. Tästä toivon seuraavan, että pian en tarvitse kielellistä selitystä vierelle, kun olen oppinut matematiikan kielen."*
1TY42	*"Luulen että näin alkuun sitä tarvitaan sillä matemaattisen symbolikielen opettelu ja hahmottaminen vievät aikaa. Itse olen jo huomannut vajaan parin lukukauden aikana miten vähitellen alkaa ymmärtää matematiikan erilaista (lukioon verrattuna) "tekemis"- ja ymmärtämistapaa."*
2TY13	*"Kielentämistehtäviä oli kurssin aikana monenlaisia. Osa tehtävistä oli muita harjoituksia helpompia, osaa oli vaikea hahmottaa. Esimerkiksi tehtävätyyppi, jossa piti täydentää todistuksessa olleita aukkoja, oli huomattavasti muita vaikeampi hahmottaa. Aluksi oli vaikea saada kiinni kielentämistehtävien ideasta. Kielentämistehtävissä sai kuitenkin soveltaa opittua monipuolisesti."*
2TY15	*"Olen oppinut ymmärtämään miten paljon helpompaa on ymmärtää ratkaisua, jossa on selostettu välivaiheet. Tehtävät ovat myös olleet erilaisia kuin matematiikantehtävät yleensä, joten niitä on joutunut ratkaisemaan eritavalla kuin tehtäviä yleensä."*
2TY29	*"En paljoa, koska en ole osannut ratkaista niitä kovinkaan montaa. Mutta olen varma, että jos olisin perehtynyt niihin syvällisesti, olisin saanut niistä paljon hyötyä. Aijon kyllä käyttää kielentämistä omatoimisesti välikokeisiin lukiessani, koska ei ratkaisuja voi vain matemaattisesti lukea, eli ratkaisut täytyy kielentää, jotta ne voisi ymmärtää."*
2TY34	*"Yleisesti tehtävät olivat hankalimmasta päästä. Mutta niitä tehdessä tuli useasti tarkasteltua asioita uudesta näkökulmasta."*

Yleisesti ottaen opiskelijat olivat Turussakin sitä mieltä, että kielentämisestä voisi olla suurta hyötyä vaikeiden matematiikan asioiden opiskelussa ja ymmärtämisessä. Monet ilmoittivat käyttävänsä sitä luentoesimerkkien selventämisessä ja laskuharjoitustehtävien selittämisessä. Opiskelijat pitivät kielentämistehtäviä vaikeina, sillä niissä piti poiketa tutusta ratkaisutavasta ja niissä joutui ajattelemaan asiaa uudelta kannalta. Tämän takia kielentämistehtävät tuntuivat suuritöisiltä, eikä kaikilla riittänyt kiinnostus käyttää tarvittavaa aikaa tehtävien tekemiseen, vaikka siitä olisikin voinut olla hyötyä.

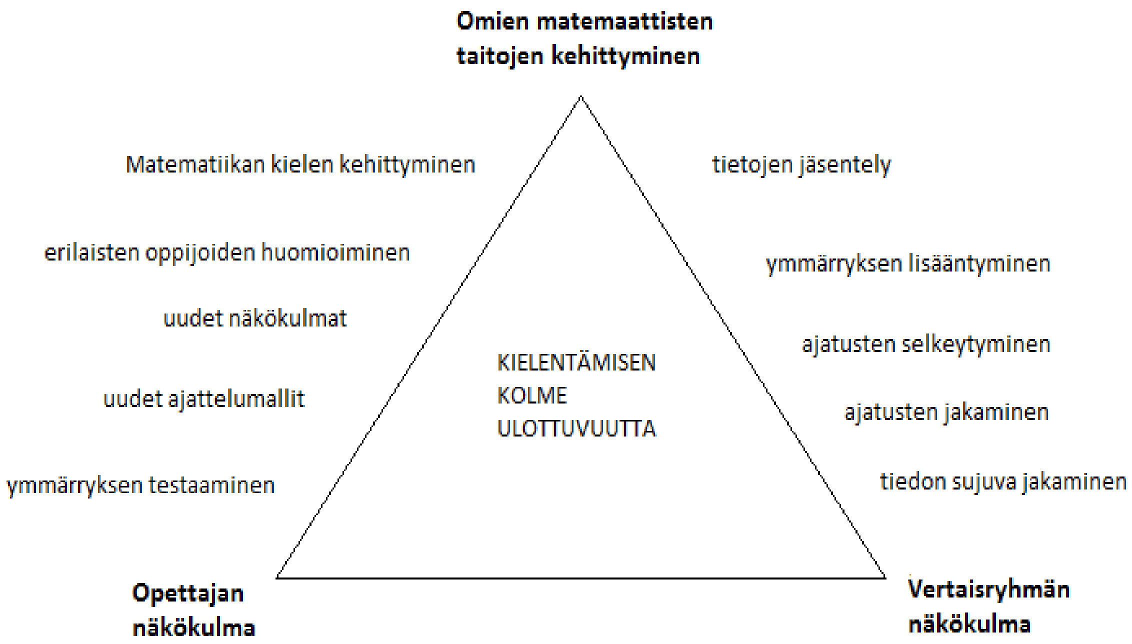
7.3 Tampereen yliopiston normaalikoulu

Kyseiseen kokeiluun Tampereen yliopiston normaalikoulussa osallistui 21 oppilasta, joista 18 teki kotiin annetun tehtävän ja 21 osallistui pistokokeeseen. Kotiin annetun tehtävän keskiarvo oli 4,04/6. Kuitenkin oppimista mitanneen pistokokeen keskiarvo jäi melko alhaiseksi (4,06/12). Tähän suurimpana syynä lienee se, että oppilaiden motivaatio pistokokeessa oli huono, mikä näkyi selkeästi muun muassa mielipidekyselyssä. Mielipidekyselyssä ei otettu juurikaan kantaa kielentämiseen, vaan siihen, että pistokokeen pitäminen oli heidän mielestään typerää.

Oli kuitenkin mielenkiintoista, että kun pistokoetta käytiin yhdessä läpi heti pistokokeen jälkeen, osasi eräs opiskelija, joka oli pärjännyt pistemäärältään heikosti, kertoa suullisesti kaikki ne asiat, joita pistokokeessa kysyttiin. Jos koe olisi ollut suullinen, olisi hän saanut täydet pisteet. Ajatusten kirjoittaminen paperille ei ilmeisesti onnistunut, mutta asia oli selvästi ymmärretty.

8 POHDINTAA

Kenelle kielentämistehtävistä on hyötyä? Taulukon 8 mukaan ainakaan pintasuuntautuneet opiskelijat eivät hyödy kielentämistehtävistä. Tämä perustuu opiskelijoiden omiin näkemyksiin kielentämisestä. Kappaleen alussa olevaa kysymystä voidaan lähestyä kolmesta eri näkökulmasta: opiskelijan omasta näkökulmasta, vertaisryhmän näkökulmasta sekä opettajan näkökulmasta. (Joutsenlahti et al, 2012)



Kuva 17: Kielentämisen kolme ulottuvuutta

Opiskelijoiden itsensä näkökulmasta kielentäminen auttaa ymmärtämään opiskeltavan asian, koska kielentäessään hän selittää vaikeita asioita itselleen tutulla ja selkeällä kielellä. Mielipidekyselyssäkin opiskelijat kertoivat turvautuvansa kielentämiseen tulevissa opinnoissaan, koska se auttaa ymmärtämään opettajan esimerkkejä paremmin ja tenttiin lukiessa harjoitustehtävän ratkaisuun on helpompi palata. Kielentäminen auttaa jäsentämään ajatuksia ja tietoja.

Vertaisryhmän näkökulmasta kielentäminen auttaa ymmärtämään toisten laskijoiden ratkaisuja ja saamaan kiinni heidän ajatusten juoksustaan. Harjoitustehtävistä on helpompi keskustella, kun ”kaikki puhuvat samaa kieltä” ja ymmärtävät toisiaan. Matematiikka ei ole vain laskujen laskemista ja ratkaisujen löytämistä, vaan ratkaisuihin pääseminen ja siihen kuljettu matka ovat jopa tärkeämpiä. On tärkeää, että opiskelija oppii perustelemaan ajatuksiaan ja ratkaisujaan ja jakamaan tietojaan muille, sillä mitä hyötyä on matemaatikosta, joka ei osaa perustella työtään… Varsinkin tuleville matematiikan opettajille tämä on tärkeä taito.

Opettajan näkökulmasta kielentäminen on hyvin hyödyllinen työkalu – joskin hieman työläs. Kielentämistehtävästä opettaja pystyy arvioimaan sitä, onko opiskelija ymmärtänyt opetetun asian oikein ja missä asioissa on ollut mahdollisia väärinkäsityksiä. Parhaimmillaan kielentämistehtävä auttaa näkemään opetettavan asian uudesta näkökulmasta, innostaa opiskelijaa jäsentämään asian itse itselleen, helpottaa asioiden ymmärtämistä sekä on keskustelua opiskelijan ja opettajan välillä. Kielentämistehtävien avulla olisi mielenkiintoista tutkia matematiikan eri solmukohtia ja näin ymmärtää paremmin sitä, miksi opiskelijoilla on vaikeuksia joidenkin tiettyjen matematiikan osa-alueiden kanssa.

Nykyään matematiikan opetus on valtavan kehityksen alla, kun laskimet ja laskuohjelmistot kehittyvät muun tietotekniikan kehityksen mukana. Laskimet ovat nykyään pieniä tietokoneita, joita oikein käyttämällä saa tehtyä kaikki mekaaniset laskutoimenpiteet ilman omien aivojen rasittamista. Ylioppilaskokeissa saa käyttää CAS-laskimia, jotka laskevat muutaman ensimmäisen perustason mekaanisen ylioppilaskoetehtävän automaattisesti. Tämän kehityksen takia on tärkeää miettiä, miten matematiikan opetusta tulisi kehittää siten, että siitä on hyötyä nykyajan nuorille tulevaisuuden ammattilaisille.

9 JOHTOPÄÄTÖKSET

Palataan vielä johdantokappaleessa esiteltyihin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaisia kielentämistehtävämalleja voidaan kehittää?
2. Millaiset kielentämistehtävät ovat toimivia?
3. Mitä mieltä opiskelijat ovat kielentämisestä ja kielentämistehtävistä?
4. Miten kielentämistä voi hyödyntää matematiikan opetuksessa ja oppimisessa?

Kielentämistehtäviä on helppo keksiä monenlaisia ja niiden avulla voidaan parhaimmassa tapauksessa auttaa opiskelijaa ajattelemaan opetettavaa asiaa itsenäisesti uudesta näkökulmasta. Tässä diplomityössä tehtävätyyppejä on mainittu seitsemän erilaista. Näitä tehtävätyyppejä voi yhdistellä lähes mielivaltaisesti tehtävänantoa keksittäessä. Yksi kielentämistehtävien parhaita puolia on se, että ratkaisu ei useimmiten ole yksikäsitteinen. Opiskelija ei voi sokeasti seurata esimerkkiratkaisua ja soveltaa sitä kaikissa vastaavissa tehtävissä. Tehtävien kehittämiseen vaaditaan vain hieman vaivaa ja mielikuvitusta sekä kykyä asettua oppijan asemaan. Ne ovat hyvä tuki perinteisempien harjoitustehtävien rinnalle.

”Kielentämistehtäviä lisää!” Tällainen oli opiskelijoiden toive tutkimuksessa käytetyn kielentämiskyselyn mukaan. Opiskelijat pitivät kielentämistehtäviä hyödyllisinä ymmärtämisen ja syvällisen oppimisen kannalta ja monet aikoivat hyödyntää oppimiaan kielentämismalleja tulevaisuudessakin. Vaikka toiset olivat sillä kannalla, että tehtävät olivat suuritöisiä, myönsivät hekin, että ne olisivat ehkä voineet auttaa oppimisessa.

Kyselyn analyysin perusteella pintasuuntautuneet opiskelijat eivät innostuneet suuritöisistä kielentämistehtävistä. Myöskään matemaattisesti lahjakkaille ja orientoituneelle opiskelijalle kielentämistehtävät tuskin ovat kovin hyödyllisiä. He ymmärtävät matematiikan kieltä jo valmiiksi, miksi siis harjoitella sitä. Kuitenkin niille opiskelijoille, joille matematiikan kieli tuottaa vaikeuksia, kielentämistehtävistä voi olla paljonkin hyötyä. Ainakaan luonnollisen kielen käyttöä matematiikan ratkaisuissa ei pitäisi kieltää vaan pikemminkin kannustaa siihen.

Tutkimuksessa käytetyt tehtävät olivat toimivia. Opiskelijoiden näkemyksiä pystyttiin hyvin kartoittamaan tutkimuksessa käytetyllä kyselyllä ja kyselyä voi tarpeen vaatiessa toistaa tulevissa tutkimuksissa. Kohderyhmiksi valikoidut kurssit – Insinöörimatematiikka 1 ja Analyysi 1 – olivat erilaisia sisällöltään, tasoltaan sekä opiskelijamateriaaliltaan ja näin ollen tutkimuksen kannalta mielenkiintoisia.

Tutkimuksessa oli ehkä turhaa erotella kielentämistehtävät ja muut tehtävät toisistaan niin selvästi. Tämä aiheutti sen, että kielentämistehtävä saattoi vaikuttaa joltain omalta osa-alueeltaan, jolla ei ollut paljoakaan tekemistä tavallisten harjoitustehtävien kanssa. Kyselyn kannalta erottelu oli kuitenkin jollakin lailla tehtävä, että opiskelijat tiesivät, mistä puhuttiin, kun puhuttiin kielentämistehtävistä. Jos tekisin tutkimuksen uudestaan, en tekisi näin selvää erottelua. Myös kirjallinen palautus saattoi tuntua opiskelijoiden mielestä ikävältä; muita tehtäviähän ei pitänyt palauttaa. Tämä saattoi olla joillekin kynnys kielentämistehtävän tekemiseen.

Kielentämistutkimusta olisi jatkossa mielenkiintoista tehdä etenkin opettajien keskuudessa. Jos vastaavanlaisen kokeilun ja kyselyn voisi järjestää matemaattisten aineiden opettajien keskuudessa, saataisiin mielenkiintoista tietoa opettajan pöydän toiselta puolelta. Lisäksi kielentämistehtävät voisivat olla hyvä työkalu oppiaineiden väliseen yhteistyöhön.

LÄHTEET

Baeten, M., Kyndt, E., Struyven, K. & Dochy, F. (2010) *Using student-centred learning environments to stimulate deep approaches to learning: Factors encouraging or discouraging their effectiveness*. Educational Research Review 5 (2010) 243-260

Biggs, J. (1999) *Teaching for Quality Learning at University: What the student does*, Constructing learning by aligning teaching: Constructive alignment. Buckingham: Open University Press. Sivut 11-32

Forehand, M. (2005). *Bloom's taxonomy*: *Original and Revised*. Emerging perspectives on learning, and technology. Viitattu 30.9.2013 http://www4.edumoodle.at/gwk/pluginfile.php/109/mod_resource/content/5/forehand_bloomschetaxonomie02.pdf

Fortier, M., Vallerand, R. & Guay F. (1995) *Academic Motivation and School Performance: Toward a Structural Model*. Contemporary Educational Psychology 20, 257-274 (1995)

Hersh, R. (1997) *Math Lingo vs. Plain English: Double Entendre*, The American Mathematical Monthly, Vol. 104, No. 1, pp. 48-51

Hoyles, C., Newman, K. & Noss, R. (2001) *Changing Patterns of Transition from School to University Mathematics*. Mathematical Sciences Group, Institute of Education, University of London

Jamison, R. (2000) *Learning the Language on Mathematics,* Language and Learning Across the Disciplines, Volume 4, Number 1

Jokinen, T. (2002) *Korkeakoulu, opiskelija ja motivaatio – Teknillisen korkeakoulun materiaali- ja kalliotekniikan osaston opiskelijoiden käsityksiä*. Kasvatustieteellinen tiedekunta, Pro gradu-tutkielma

Joutsenlahti, J. (2009) *Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä*. Teoksessa Raimo Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Rovaniemi: Lapin yliopisto, 71-86. (Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9).

Joutsenlahti, J. (2010) *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa*. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. ja Sormunen, K. (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Sivut 3-15.

Joutsenlahti, J., Rättyä, K. (2011) *Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta Sanan lasku –projektissa*, Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Tampereella 14.-15.10.2010, s. 171-187

Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J., Harjulehto, P. (2012) *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa*, Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Reseach Assosiation, s. 59-70

Kember, D. & Leung, D. (2004) *The influence of the teaching and learning environment on the development of generic capabilities needed for a knowledge-based society*. Learning Environments Research (2005) 8:245-266

Kuh, G. (2005) *7 steps for taking student learning seriously*. Trusteeship 13 (3), 20-24

Lavonen, J. (2008) *PISA 2006 –tutkimuksen tuloksia: luonnontieteiden osaaminen ja kiinnostavuus*. Dimensio 1/2008 Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti 72. vuosikerta

Lavonen, Meisalo & al. *Opetuksen tavoitteet ja työtavat*, http://www.edu.helsinki.fi/malu/kirjasto/tyotavat/main.htm (Viitattu 11.9.2013)

Lehtinen, E., Kuusinen, J., Vauras, M. (2007) *Kasvatuspsykologia*. 2. uudistettu painos. Helsinki:WSOY.

Lunti, L. (2009) *Hyvien matematiikan osaajien huono motivaatio. Sosiaalisen oppimisympäristön, tavoitteiden, intressien, itsetunnon ja toiminta- ja tulkintatapojen vaikutus motivaatioon*. Joensuun Yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta, Erityispedagogiikan pro gradu-tutkielma

Opetushallitus: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus (Viitattu 11.9.2013) sekä http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus (Viitattu 11.9.2013)

Pohjolainen, S., Silius, K., Huikkola, M. & Raassina, H. (2007) *Clustering of students of engineering mathematics based on their attitudes, orientations, motivations and intentions*

Rask, N. (2010) *Teoriaa ja tosielämän dataa opiskelumotivaatiosta ja sen merkityksestä*. Tampereen ammattikorkeakoulu, Ammatillinen opettajakorkeakoulu, Opettajankoulutuksen kehittämishanke

The Free Dictionary: http://www.thefreedictionary.com/learning, (Viitattu 30.9.2013)

Tossavainen, T. (2007) *Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva*. Teoksessa Niikko, A., Pellikka, I & Savolainen, E. 2007. Oppimista, opetusta, monitieteisyyttä. Kirjoituksia Kuninkaankartanonmäeltä. Joensuu: Joensuun yliopisto, 233-243.

Vainonpää, J. (2006) *Erilaiset oppijat ja oppimateriaalit verkko-opiskelussa*, Väitöskirja, Tampereen yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Acta Universitatis Tamperensis 1133, s. 70-72

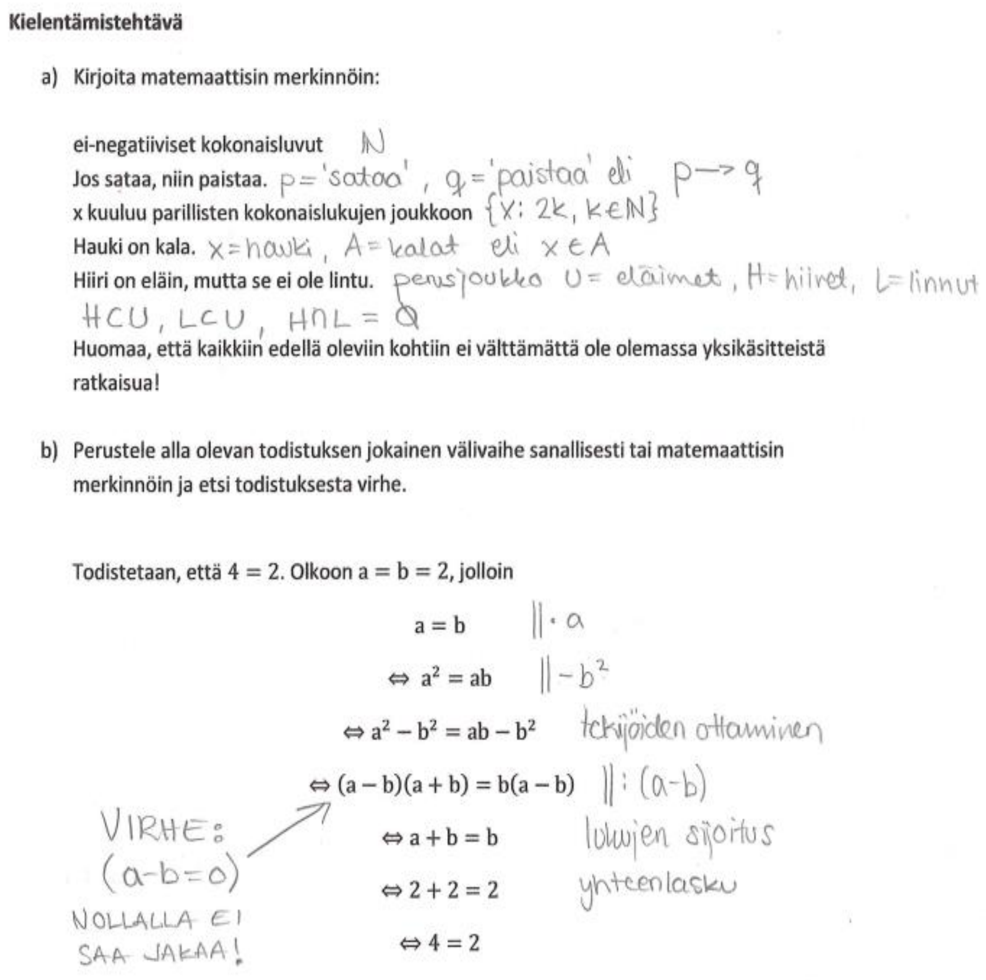
Verkkotutor (1996-2005) Tampereen yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen verkkopalvelu http://www.uta.fi/tyt/verkkotutor/oppimin.htm , (Viitattu 8.9.2013)

Väisänen, P., Rautopuro, J. & Ylönen, S. (2004) *Modelling the impact of teacher education students – real and perceived maths ability and motivational-affective factors on their success in elementary statistics*. Paper presented at the European Conference on Educational Research, University of Crete, 22-25 September 2004

Väisänen, P. & Ylönen, S. (2004) *Matemaattiset taidot ja matemaattinen minäkäsitys tilastollisten menetelmien oppimisessa*, Kasvatus 4/2004 365-378

Wikibooks: http://fi.wikibooks.org/wiki/Matematiikka/Johdanto_matematiikkaan, (Viitattu 8.9.2013)

LIITE 1



Kielentämistehtävä

a) Kirjoita matemaattisin merkinnöin:

ei-negatiiviset kokonaisluvut $\mathbb{N}$
Jos sataa, niin paistaa. p='satoa', q='paistaa' eli $p \rightarrow q$
x kuuluu parillisten kokonaislukujen joukkoon $\{x: 2k, k \in \mathbb{N}\}$
Hauki on kala. x=hauki, A=kalat eli $x \in A$
Hiiri on eläin, mutta se ei ole lintu. perusjoukko U= eläimet, H=hiiret, L=linnut
$H \subset U$, $L \subset U$, $H \cap L = \emptyset$

Huomaa, että kaikkiin edellä oleviin kohtiin ei välttämättä ole olemassa yksikäsitteistä ratkaisua!

b) Perustele alla olevan todistuksen jokainen välivaihe sanallisesti tai matemaattisin merkinnöin ja etsi todistuksesta virhe.

Todistetaan, että 4 = 2. Olkoon a = b = 2, jolloin

$a = b \quad \| \cdot a$

$\Leftrightarrow a^2 = ab \quad \| -b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$ tekijöiden ottaminen

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = b(a-b) \quad \| : (a-b)$

$\Leftrightarrow a + b = b$ lukujen sijoitus

$\Leftrightarrow 2 + 2 = 2$ yhteenlasku

$\Leftrightarrow 4 = 2$

VIRHE: $(a-b=0)$
NOLLALLA EI SAA JAKAA!

Kuva 18: TTY:n ensimmäinen kielentämistehtävä. Tämän tehtävän ratkaisu – kuten muidenkin jatkossa esiteltävien tehtävien ratkaisut - on erään opiskelijan tekemä. Tätä tehtävää tehtiin kurssin kielentämistehtävistä eniten. Sen palautti yhteensä 77 opiskelijaa.

LIITE 2

bijektio $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

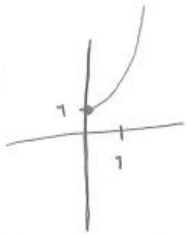
surjektio f:n arvojoukko koko B

$f(A) = B$

Kielentämistehtävä 2

1. **Selvitä omin sanoin, mikä on funktio. Keksi sitten jokin funktio, joka on bijektio (perustele), ja piirrä se.**

Funktio on "sääntö", miten toisesta luvusta saadaan johdettua toinen luku.



Esim. $f(x) = x^2 + 1$ $\quad f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$

koska funktion arvojoukko on koko maalijoukko

Lisäksi, kun x saa vain arvoja 0:sta ylöspäin se saa kukin arvonsa vain kerran

2. **Lisää puuttuvat välivaiheet ja perustelut.**

Todistetaan, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $3^n > 2n$.

Käytetään induktio-oletusta:

Alkuaskel: yhtälön tulee olla tosi n:n pienimmällä arvolla $n=1$

$3^1 > 2 \cdot 1$

$3 > 2$, tosi!

Oletetaan, että kun $n = k$, niin $\boxed{3^k > 2k}$ ⇐ INDUKTIO-OLETUS

Jos yhtälö on tosi, kun $n=k$, yhtälö on myös tosi

Kun $n = k + 1$,

$$3^{k+1} = \overset{3^k \cdot 3^1}{\cdots} > 3 \cdot 2k = \overset{6k}{\cdots} = 2k + 4k > 2k + 4 > 2k + 2 = \cdots \; 2(k+1)$$

VP

$3^{k+1} = 3^k \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot 2k$

OP

$2(k+1) = 2k + 2$

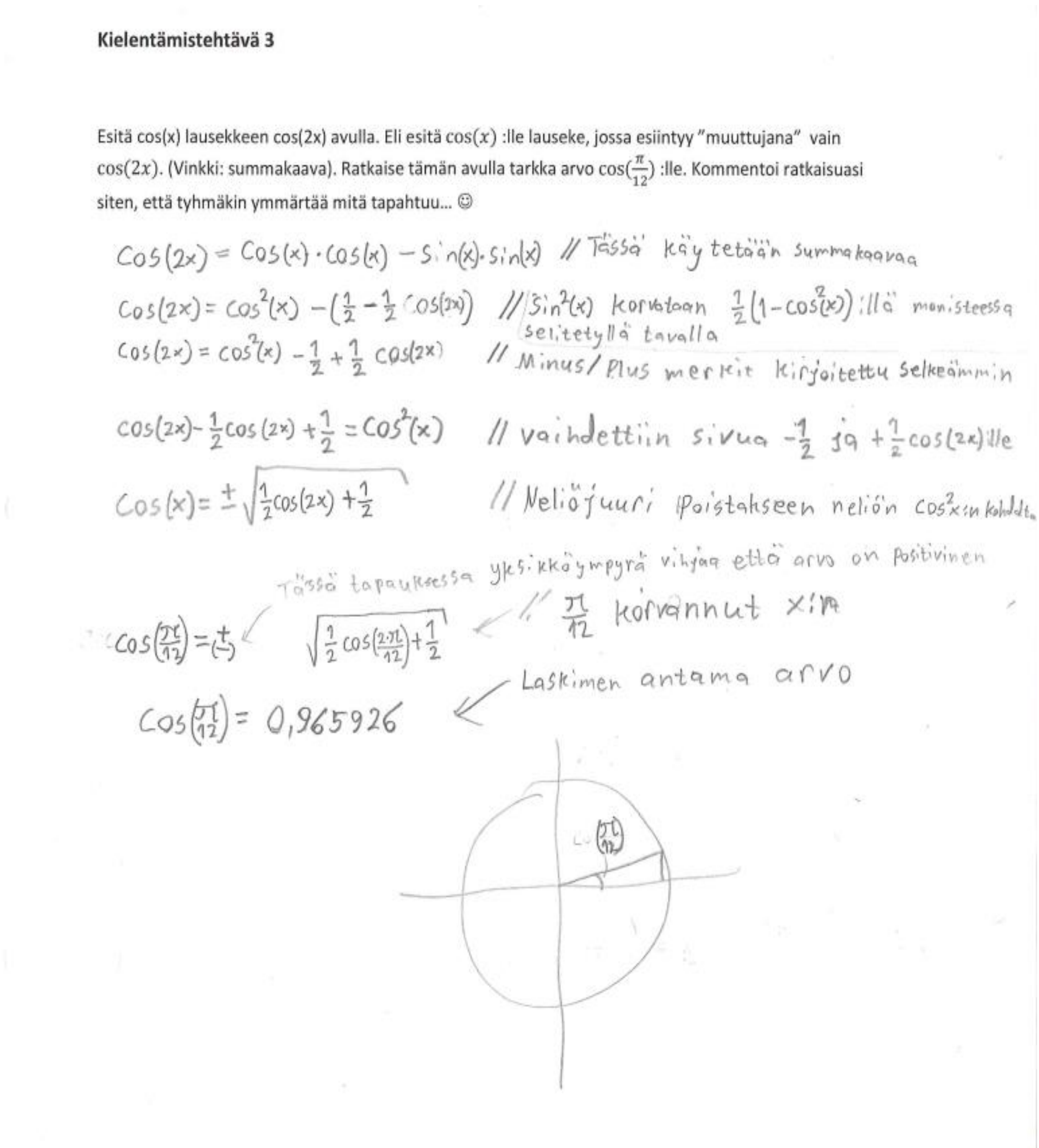
(induktio-oletus)

$3^k > 2k$

$= 6k = 2k + 4k >$

Kuva 19: TTY:n kurssin toista kielentämistehtävää ratkaistiin toiseksi eniten; 67 opiskelijaa palautti tehtävän.

LIITE 3



Kielentämistehtävä 3

Esitä cos(x) lausekkeen cos(2x) avulla. Eli esitä $\cos(x)$:lle lauseke, jossa esiintyy "muuttujana" vain $\cos(2x)$. (Vinkki: summakaava). Ratkaise tämän avulla tarkka arvo $\cos(\frac{\pi}{12})$:lle. Kommentoi ratkaisuasi siten, että tyhmäkin ymmärtää mitä tapahtuu... ☺

$\cos(2x) = \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)$ // Tässä käytetään summakaavaa

$\cos(2x) = \cos^2(x) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x))$ // $\sin^2(x)$ korvataan $\frac{1}{2}(1-\cos^2(x))$:llä monisteessa selitetyllä tavalla

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ // Minus/Plus merkit kirjoitettu selkeämmin

$\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} = \cos^2(x)$ // vaihdettiin sivua $-\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{2}\cos(2x)$:lle

$\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}}$ // Neliöjuuri poistakseen neliön $\cos^2x$:n kohdalt.

Tässä tapauksessa yksikköympyrä vihjaa että arvo on positiivinen

$\cos(\frac{\pi}{12}) = (\pm)\sqrt{\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{12}) + \frac{1}{2}}$ // $\frac{\pi}{12}$ korvannut x:n

Laskimen antama arvo

$\cos(\frac{\pi}{12}) = 0{,}965926$

Kuva 20: TTY:n kolmas kielentämistehtävä oli opiskelijoille ilmeisesti haastavin. 33 opiskelijaa palautti tehtävän. Tämä oli selvästi pienin määrä palautuksia verrattuna muihin kielentämistehtäviin.

LIITE 4

Kielentämistehtävä

Kerro omin sanoin, miten

a) funktion derivaatta kuvaa funktion kulkua ja miksi derivaatan nollakohdat ovat ns. kriittisiä pisteitä

b) ja miten funktion toinen derivaatta liittyy näihin kriittisiin pisteisiin.

Ratkaise lisäksi funktion $f(x) = x^3 - 12x + 1$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu sekä kulkukaavion että toisen derivaatan avulla perustellen kaikki välivaiheet omin sanoin.

a. Funktion derivaatta kertoo, kuinka jyrkästi funktio kasvaa tai vähenee, näin saadaan selville funktion kulkua. Funktion derivaatta on nolla, kun funktio kulkee vaakasuoraan. Funktion kulkiessa vaakasuoraan, sen suunta muuttuu. Siis jos funktio on ensin kasvava ja saavuttaa sitten derivaatan nollakohdan eli kääntyy vaakasuoraksi, niin seuraavaksi funktio alkaa vähentyä. Derivaatan nollakohdat voivat myös kertoa funktion ääriarvokohtia.

b. Funktion toinen derivaatta kertoo, onko välillä (a,b) oleva funktion ensimmäisen derivaatan nollakohta lokaali maksimi vai minimi.

$f(x) = x^3 - 12x + 1$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 12$

(2) DNK:t $3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

(3) $x = \pm 2$

(4) Kulkukaavio:

$f'(x)$	+	−	+
(5) $f(x)$	↗	↘	↗
		-2	2 → x

(6) joten $x=-2$ on lokaali maksimikohta, ja $x=2$ on lokaali minimikohta

(7) Toinen derivaatta:

$f''(x) = 6x$

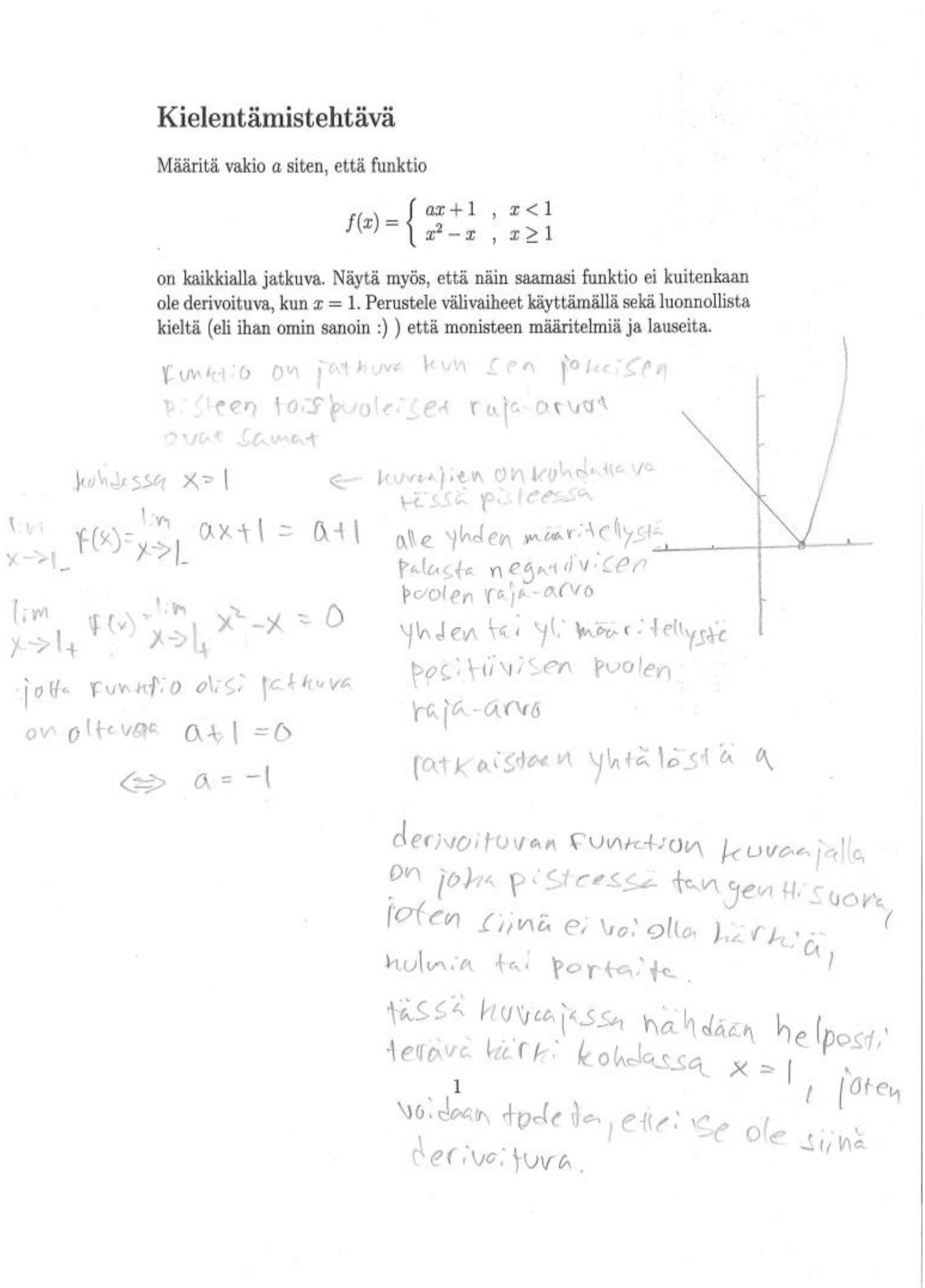
$f''(x) < 0$ pisteen $x=-2$ ympäristössä, joten se on lokaali maksimi

$f''(x) > 0$ pisteen $x=2$ ympäristössä, joten se on lokaali minimi.

(1) Derivoitu
(2) Laskettu derivaatan nollakohdat
(3) Saatu vastaus
(4) Testattu derivaatan merkki arvoilla $x<-2$, $-2<x<2$ ja $x>2$
(5) Funktio kulkee derivaatan merkin mukaan.
(6) Selitys
(7) Vaihtoehto kohdille 4–6

Kuva 21: TTY:n neljättä kielentämistehtävää palautettiin 59 kappaletta. Sanallisen palautteen perusteella opiskelijat pitivät tätä tehtävää hyvin hyödyllisenä ja opettavaisena.

LIITE 5



Kielentämistehtävä

Määritä vakio a siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & , \quad x<1 \\ x^2-x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva. Näytä myös, että näin saamasi funktio ei kuitenkaan ole derivoituva, kun $x = 1$. Perustele välivaiheet käyttämällä sekä luonnollista kieltä (eli ihan omin sanoin :)) että monisteen määritelmiä ja lauseita.

Funktio on jatkuva kun sen jokaisen pisteen toispuoleiset raja-arvot ovat samat

kohdassa $x=1$ ← kuvaajien on kohdattava tässä pisteessä

$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} ax+1 = a+1$

alle yhden määrittelystä palasta negatiivisen puolen raja-arvo

$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_+} x^2-x = 0$

yhden tai yli määrittelystä positiivisen puolen raja-arvo

jotta funktio olisi jatkuva on oltava $a+1=0$

ratkaistaan yhtälöstä a

$\Leftrightarrow \quad a=-1$

derivoituvan funktion kuvaajalla on joka pisteessä tangenttisuora, joten siinä ei voi olla kärkiä, kulmia tai portaita.

tässä kuvaajassa nähdään helposti terävä kärki kohdassa $x=1$, joten voidaan todeta, ettei se ole siinä derivoituva.

1

Kuva 22: TTY:n tehtävää viisi palautettiin 55 kappaletta. Tässä tehtävässä opiskelijat käyttivät paljon kuviokieltä selittämään omia perustelujaan.

LIITE 6

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)
Täydennä seuraava ratkaisu; lisää tarvittavat välivaiheet, perustelut ja loppuun yhteenveto. Keksi ratkaisulle tehtävänanto.

Ratkaisu:

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$$
$$|y| \le |x-y| + |x|$$

Tällöin

$$|x| - |y| \le |x-y| \text{ ja } -|x-y| \le |x| - |y|.$$

Todista kolmiepäyhtälön $|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$ nojalla, että epäyhtälö

$$-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y| \quad \text{on tosi.}$$

1° Oikean puolen todistus:

$|x|-|y| \le |x-y|$ Siirretään termejä, jolloin epäyhtälö saadaan muotoon

$|x| \le |x-y|+|y|$ lausutaan $|x|$ toisella tavalla, jolloin epäyhtälö tulee muotoon:

$|x| = |(x-y)+y|$

$|(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$, mikä on kolmioepäyhtälön nojalla tosi.

Oikea puoli epäyhtälöstä on siis todistettu.

2° Vasemman puolen todistus:

$-|x-y| \le |x|-|y|$ Siirretään termejä ja saadaan yhtälö muotoon

$|y| \le |x-y|+|x|$ lausutaan $|y|$ toisella tavalla jolloin epäyhtälö tulee muotoon

$|y| = |-(x-y)+x| = |x-(x-y)|$

$|x-(x-y)| \le |x|+|x-y|$, mikä on kolmiepäyhtälön nojalla tosi.

Vasenkin puoli epäyhtälöstä on siis todistettu.

Tällöin $|x|-|y| \le |x-y|$ ja $-|x-y| \le |x|-|y|$

Eli $-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y|$ $\square$

Kuva 23: Turun 1. kielentämistehtävä

LIITE 7

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)
Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Kerro *omin sanoin suomenkielellä* miten määritelmän nojalla osoitetaan, että lukujono suppenee.

6. Koska lukujono (x_n) suppenee, on olemassa jokin reaaliluku, olkoon se a, jota (x_n) lähestyy eli jota kohti se suppenee. Luku a on tällöin lukujonon raja-arvo, jota merkitään $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Ko. tilanteessa on olemassa myös sellainen etäisyys ε, joka on positiivinen reaaliluku, luvusta a, jonka jälkeen kaikki (x_n) jäsenet ovat korkeintaan ε:in päässä luvusta a. Jokaista etäisyyttä ε kohti on olemassa sellainen indeksin n arvo n_ε, joka kuuluu luonnollisiin lukuihin, jonka jälkeen kaikki (x_n) jäsenet ovat korkeintaan ε:in päässä luvusta a. Em. on voimassa vain kun $n > n_\varepsilon$.

Todistaaksemme, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua a, on etsittävä sellainen luku n_ε, että (x_n) jäsenten ja luvun a etäisyyden itseisarvo on pienempi kuin etäisyys ε. Merkitään

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Mikäli n_ε ei ole olemassa tai todistuksessa syntyy muu ristiriita, ei lukujono suppene kohti lukua a. Jos luku n_ε löytyy, suppenee lukujono kohti lukua a kaikilla n_ε suuremmilla n:n arvoilla. M.O.T.

Kuva 24: Turun 2. kielentämistehtävä

LIITE 8

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Korjaa seuraavan tehtävän ratkaisu.

TEHTÄVÄ. Olkoon (x_n) lukujono , jolle $x_n = \frac{7}{\sqrt{n}}$. Osoita, että lukujono suppenee kohti nollaa.

RATKAISU. Kaikilla n' saamme

$$|x_n - 0| < \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{5\sqrt{n}}{n} < \frac{1}{n'}$$

kun $n > n'$. Erityisesti $|x_n - 0|$ on pientä kun n on suurta, joten lukujono suppenee.

Tehtävä: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \frac{7}{\sqrt{n}}$
Osoita, että lukujono suppenee kohti nollaa

Ratkaisu: Tehtävä tulisi aloittaa näin...

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n' =$

... ja sitten jatketaan...

$$|x_n - 0| = \left|\frac{7}{\sqrt{n}} - 0\right| = \left|\frac{7}{\sqrt{n}}\right| = \frac{7}{\sqrt{n}} < \frac{8}{\sqrt{n}} = 8/\sqrt{(\tfrac{8}{\varepsilon})^2} = \varepsilon$$

tämä oli väärin!

valitaan $n > 0$

... täytetään $n' = (\frac{8}{\varepsilon})^2$ tehtävän alkuun ja lopuksi todetaan vielä, että $n > n'$ ja $n > 0$ □

Alkuperäisessä ratkaisussa oli tehty seuraavat virheet:

$$|x_n - 0| < \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{5\sqrt{n}}{n} < \frac{1}{n'}}_{\text{tässä logiikka pettää}}$$

itseisarvot voi poistaa vain jos $n > 0$

Tehtävän esiinpano on kokonaisuudessaan huono, ja tärkeää tietoa puuttuu.

Kuva 25: Turun 3. kielentämistehtävä

LIITE 9

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Järjestä alla olevat kohdat 1-10 niin, että niistä tulee lauseen todistus.

Lause *Olkoon* (x_n) *nouseva lukujono. Tällöin se joko suppenee tai kasvaa rajatta.*

1. oletetaan sitten, että tälläistä reaalilukua m ei ole olemassa
2. tällöin jono on ylhäältä rajoitettu
3. koska (x_n) on nouseva niin
4. oletetaan ensin, että on olemassa $m \in \mathbb{R}$
5. tällöin jokaista $m \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa n'
6. joten tässä tapauksessa jono kasvaa rajatta
7. joten nousevena se suppenee
8. siten, että $x_n \leq m$ kaikilla indekseillä n
9. siten, että $x_{n'} > m$
10. $x_n \geq x_{n'}$ kaikilla indekseillä $n > n'$

Vihje: Ratkaisu on muotoa 4, ?, ?, ?, 1, ?, ?, ?, ?, ?.

t. 6

Olkoon (x_n) nouseva lukujono. Tällöin se joko suppenee tai kasvaa rajatta.

(4) Oletetaan ensin, että on olemassa $m \in \mathbb{R}$

(8.) siten, että $x_n \leq m$ kaikilla indekseillä n.

(2.) Tällöin jono on ylhäältä rajoitettu

(7.) joten nousevana se suppenee.

(1.) Oletetaan sitten ettei tällaista reaalilukua m ole olemassa.

(5.) Tällöin jokaista $m \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa n'

(9.) siten että $x_{n'} > m$.

(3) Koska (x_n) on nouseva niin

(10.) $x_n \geq x_{n'}$ kaikilla indekseillä $n > n'$

(6.) joten tässä tapauksessa jono kasvaa rajatta.

Kuva 26: Turun 4. kielentämistehtävä

LIITE 10

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Täydennä todistuksen puuttuvat kohdat.

Lause *Olkoot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla on raja-arvot a ja $b \neq 0$ pisteessä x_0. Osoita, että funktiolla $\frac{f}{g} : A \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ on raja-arvo $\frac{a}{b}$ pisteessä x_0.*

Todistus. Todistetaan aluksi, että jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, niin   . Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska   , on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{1}{2}$ ja $|1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin saamme

$$\left| \qquad \right| = \frac{|f(x) - 1|}{|f(x)|} < \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot 2 = \varepsilon$$

kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tämän jälkeen saadaan yleisesti

$$\qquad = \qquad = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{g(x)}{b}} = \qquad = \frac{a}{b}.$$

Olkoot $f: A \to \mathbb{R}$ ja $g: A \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla on raja-arvot a ja $b \neq 0$ pisteessä x_0. Osoita, että funktiolla $f/g : A \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ on raja-arvo a/b pisteessä x_0

Todistus: Todistetaan aluksi, että jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, niin $|1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}\varepsilon$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{1}{2}$ ja $|1 - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$ Tällöin saamme

$$\left|1 - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f(x) - 1|}{|f(x)|} < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot 2 = \varepsilon$$

kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$. Tämän jälkeen saadaan yleisesti

$$\frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{g(x)}{b}}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot a \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{1}}_{=1} = \frac{a}{b} \quad \square$$

Kuva 27: Turun 5. kielentämistehtävä

LIITE 11

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Lue oheinen todistus ja laadi sille tehtävänanto. Muista kirjoittaa huolellisesti oletukset.

Toditus. Merkitään, että $p = \inf\{f(x) : x \in (a,b)\}$. Tämä on olemassa koska funktion arvojoukko on alhaalta rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa luku $x_p \in (a,b)$ siten, että

$$p \leq f(x_p) < p + \varepsilon.$$

Oletusten perusteella pätee, että $f(x) \leq f(x_p)$ kaikilla $x_p < x < b$. Tällöin siis pätee, että

$$p \leq f(x) < p + \varepsilon \text{ kaikilla } x_p < x < b.$$

Väite seuraa tästä.

6) Olkoon funktio $f(a,b) \to \mathbb{R}$ vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Osoita, että funktiolla on vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä b.

Tod. Merk $p = \inf\{f(x) : x \in (a,b)\}$

Olk $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, x_p \in (a,b)$ s.e.

$$p \leq f(x_p) < p + \varepsilon$$

Oletusten perusteella pätee, että $f(x) \leq f(x_p)$ $\forall\ x_p < x < b$

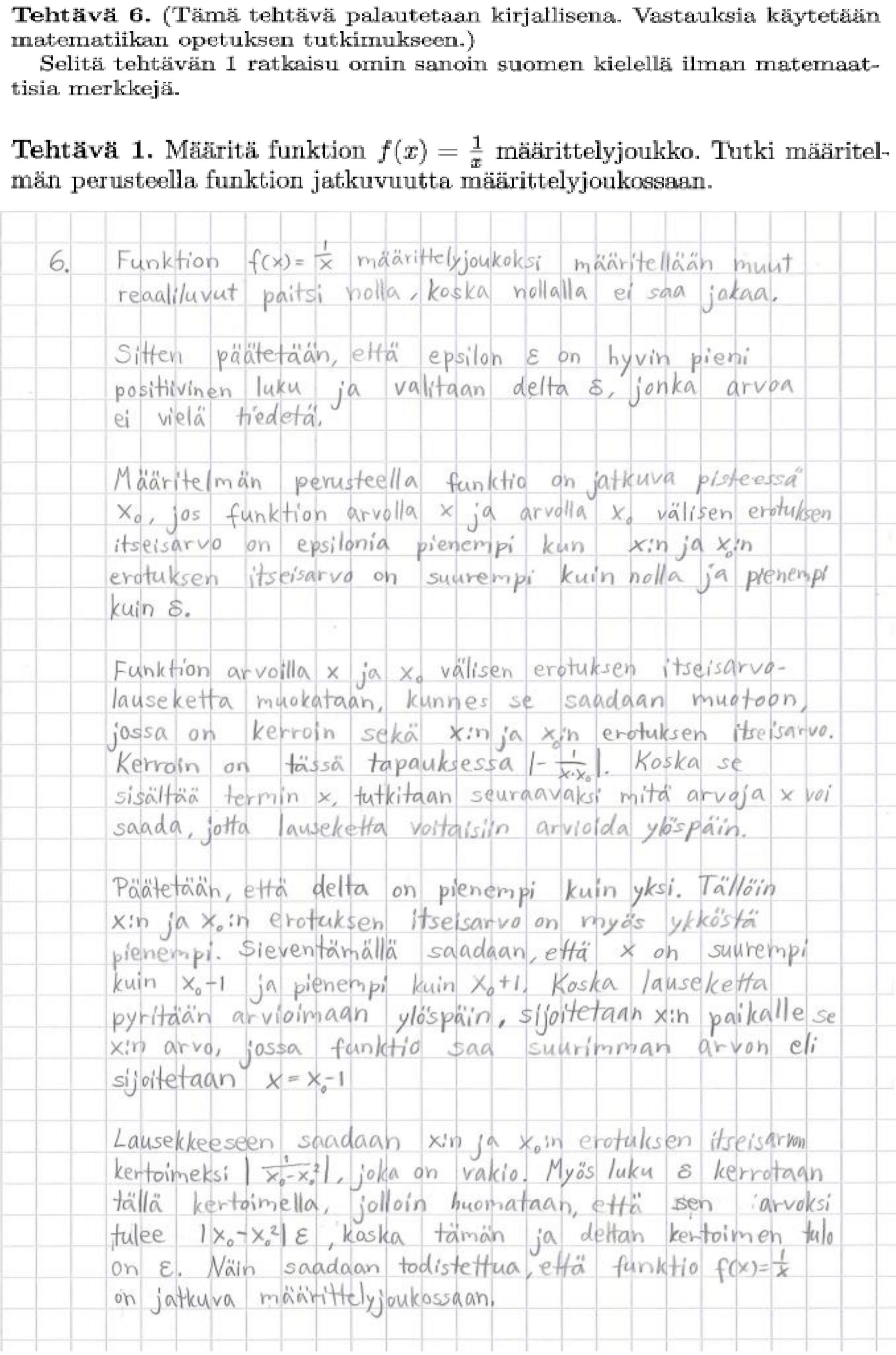
Tällöin siis pätee

$$p \leq f(x) < p + \varepsilon \quad \text{kaikilla } x_p < x < b$$

Väite siis seuraa tästä $\square$

Kuva 28: Turun 6. kielentämistehtävä

LIITE 12



Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Selitä tehtävän 1 ratkaisu omin sanoin suomen kielellä ilman matemaattisia merkkejä.

Tehtävä 1. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ määrittelyjoukko. Tutki määritelmän perusteella funktion jatkuvuutta määrittelyjoukossaan.

6. Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ määrittelyjoukoksi määritellään muut reaaliluvut paitsi nolla, koska nollalla ei saa jakaa.

Sitten päätetään, että epsilon ε on hyvin pieni positiivinen luku ja valitaan delta δ, jonka arvoa ei vielä tiedetä.

Määritelmän perusteella funktio on jatkuva pisteessä x_0, jos funktion arvolla x ja arvolla x_0 välisen erotuksen itseisarvo on epsilonia pienempi kun x:n ja x_0:n erotuksen itseisarvo on suurempi kuin nolla ja pienempi kuin δ.

Funktion arvoilla x ja x_0 välisen erotuksen itseisarvo-lauseketta muokataan, kunnes se saadaan muotoon, jossa on kerroin sekä x:n ja x_0:n erotuksen itseisarvo. Kerroin on tässä tapauksessa $\left|-\frac{1}{x\cdot x_0}\right|$. Koska se sisältää termin x, tutkitaan seuraavaksi mitä arvoja x voi saada, jotta lauseketta voitaisiin arvioida ylöspäin.

Päätetään, että delta on pienempi kuin yksi. Tällöin x:n ja x_0:n erotuksen itseisarvo on myös ykköstä pienempi. Sieventämällä saadaan, että x on suurempi kuin x_0-1 ja pienempi kuin x_0+1. Koska lauseketta pyritään arvioimaan ylöspäin, sijoitetaan x:n paikalle se x:n arvo, jossa funktio saa suurimman arvon eli sijoitetaan $x = x_0-1$

Lausekkeeseen saadaan x:n ja x_0:n erotuksen itseisarvon kertoimeksi $\left|\frac{1}{x_0-x_0^2}\right|$, joka on vakio. Myös luku δ kerrotaan tällä kertoimella, jolloin huomataan, että sen arvoksi tulee $|x_0-x_0^2|\,\varepsilon$, koska tämän ja deltan kertoimen tulo on ε. Näin saadaan todistettua, että funktio $f(x)=\frac{1}{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Kuva 29: Turun 7. kielentämistehtävä

LIITE 13

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Laadi oheiselle ratkaisulle tehtävänanto.

Ratkaisu. Tutkitaan niiden pisteiden joukkoa, joissa funktio f saa negatiivisia arvoa. Merkitään tätä joukkoa $F = \{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$. Joukko on epätyhjä koska $f(0) = -1$. Lisäksi joukko F on ylhäältä rajoitettu; yksi on sen yläraja. Tällöin joukolla F on supremum; merkitään $s = \sup F$. Koska funktio f on oikealta jatkuva päätepisteessä 0 ja vasemmalta jatkuva päätepisteessä 1 sekä $f(0) = -1$ ja $f(1) = 1$, on olemassa $\delta_1, \delta_2 > 0$ siten, että $f(y) < -\frac{1}{2}$ kun $0 \leq y < 0 + \delta_1$ ja $f(y) > \frac{1}{2}$ kun $1 - \delta_2 < y \leq 1$. Saamme, että $0 < s < 1$. Valitaan jono (y_n), joka suppenee kohti lukua s seuraavasti: jokaisella luonnollisella luvulla $n \geq 1$ valitaan piste x_n, joka toteuttaa ehdot $s - \frac{1}{n} \leq x_n \leq s$ ja $f(x_n) < 0$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä s saamme $f(s) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Koska $f(x_n) < 0$ kaikilla n, niin saamme $f(s) \leq 0$. Toisaalta kun $y > s$, niin $y \notin F$, joten $f(y) \geq 0$. Tästä saamme jatkuvuuden nojalla, että $f(s) = \lim_{y\to s+} f(y) \geq 0$. Koska $f(s) \leq 0$ ja $f(s) \geq 0$, niin $f(s) = 0$.

6. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Ol. $f(0) = -1$ ja $f(1) = 1$.
Osoita että funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $(0,1)$.

Kuva 30: Turun 8. kielentämistehtävä

LIITE 14

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Miten laskutoimitus $3^{-\frac{3}{4}}$ määritellään? Käy käy kaikki kohdat läpi oikeassa järjestyksessä (ilman todistuksia) alkaen vaiheesta $x^1 = x$.

- Kaikki luvut korotettuna potenssiin yksi, antaa tulokseksi luvun yksi

$x^1 = x$ | $(3^1)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

- Kun luku korotetaan negatiiviseen exponenttiin, saadaan luvun käänteisluku

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

- Korotettessa luku murtopotenssiin, (tällöin luvun oltava >0) saadaan nimittäjästä juuren suurus ja osittajasta luvun eksponentti.

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ | $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$ $\left(= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right)$

eli $3^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$

Kuva 31: Turun 9. kielentämistehtävä

LIITE 15

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Kuvitellaan, että olet Analyysi 1 -kurssin luennoitsija. Sinun pitää yhdellä välikoetehtävällä testata ovat opiskelijat ymmärtäneet jatkuvuuden. Minkä tehtävän valitset? Perustele lyhyesti miksi valitsemasi tehtävä on sopiva. Laadi tehtävälle malliratkaisu ja pisteytä malliratkaisu (koko tehtävän pistemäärä on 6).

6. Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään funktio $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla, että $g(x) = \max\{f(x), \lambda\}$. Osoita, että g on jatkuva.

Ratk:

Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \max\{f(x), \lambda\}$.

1p: $\lambda < f(x_0)$

1p: Voidaan valita $r > 0$ s.e. $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ja $\lambda < f(x)$ jolloin $g(x) = f(x)$ ja $g(x)$ on täten jatkuva.

1p: $\lambda > f(x_0)$

1p: Voidaan valita $r > 0$ s.e. $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ja $\lambda > f(x)$ jolloin $g(x) = \lambda$ ja $g(x)$ on täten jatkuva

1p: $\lambda = f(x_0)$

1p: $|g(x) - g(x_0)| = |\max\{f(x), \lambda\} - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |\lambda - \lambda|$
$= |f(x) - f(x_0)| + 0 < \varepsilon$

eli täten $g(x)$ on jatkuva kun $\lambda = f(x_0)$

$\Rightarrow g(x)$ on jatkuva

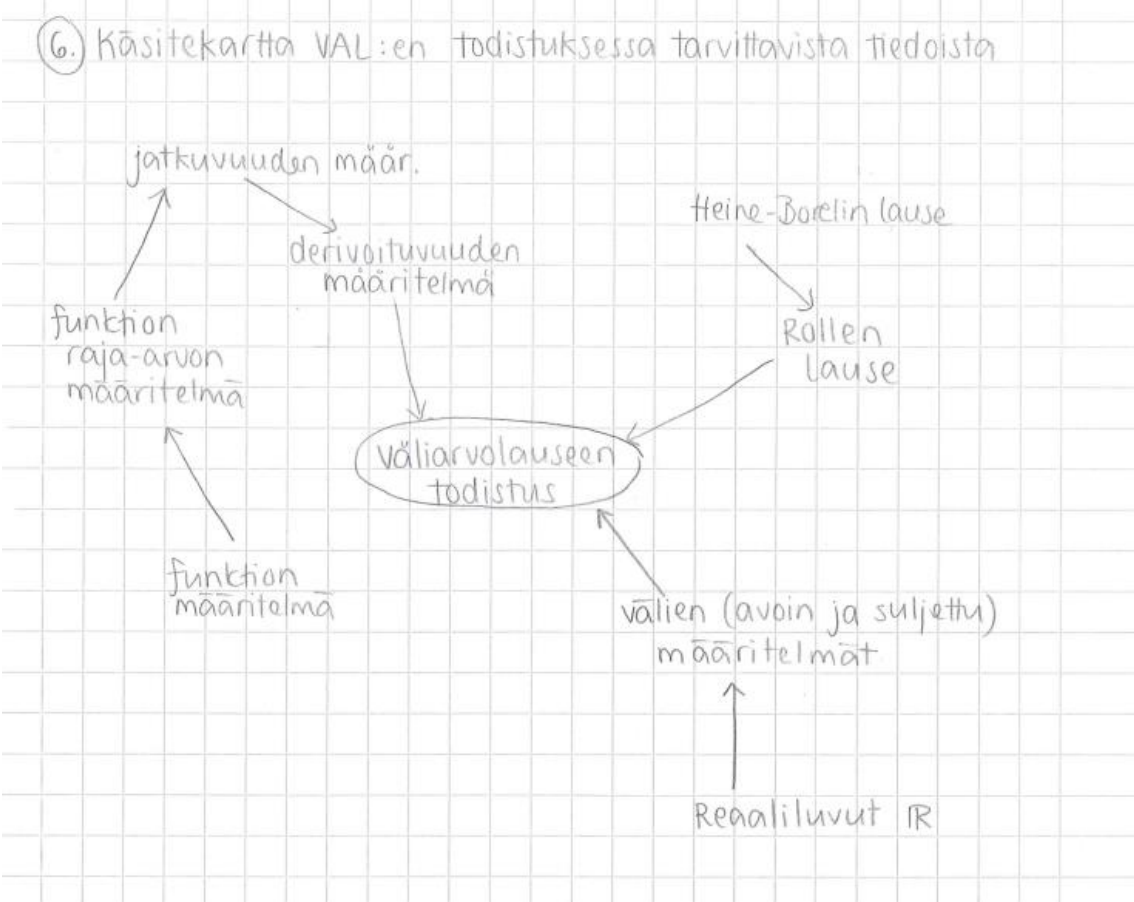
Tehtävä on hyvä, koska siinä täytyy ymmärtää funktion ja vakiofunktion jatkuvuus ja niiden avulla selvittää kolmannen funktion jatkuvuus.

Kuva 32: Turun 10. kielentämistehtävä

LIITE 16

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Mitä tietoja tarvitaan Väliarvolauseen todistamiseen? Piirrä käsitekartta.



Kuva 33: Turun 11. kielentämistehtävä

LIITE 17

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)
Järjestä lauseet niin että niistä syntyy todistus. Minkä tuloksen todistuksen sait?

1 jos funktio f on identtisesti nolla
2 funktio ei saavuta sitä välin päätepisteissä a ja b
3 oletusten mukaan $f'(\xi)$ on olemassa
4 voimme olettaa, että f saa negatiivisia arvoja
5 niin $f'(x) = 0$ koko välillä
6 koska pienin arvo on negatiivinen
7 tällöin $f'(\xi) = 0$
8 suljetulla välillä jatkuvana funktiona
9 sillä muutoin voimme tutkia funktiota $-f$
10 oletetaan nyt, että f ei ole identtisesti nolla
11 olkoon $\xi \in (a, b)$ piste
12 f saa pienimmän arvonsa
13 jossa pienin arvo saavutetaan

6. 1 jos funktio f on identtisesti nolla
5 niin $f'(x)=0$ koko välillä
10 oletetaan nyt että f ei ole identtisesti nolla
4 voimme olettaa että f saa negativisia arvoja
9 sillä muutoin voimme tutkia funktiota $-f$
8 suljetulla välillä jatkuvana funktiona
12 f saa pienimmän arvonsa
6 koska pienin arvo on negativinen
2 funktio ei saavuta sitä välin päätepisteissä a ja b
11 olkoon $\varepsilon \in (a, b)$ piste
13 jossa pienin arvo saavutetaan
3 oletuksen mukaan $f'(\varepsilon)$ on olemassa
7 tällöin $f(\varepsilon)=0$

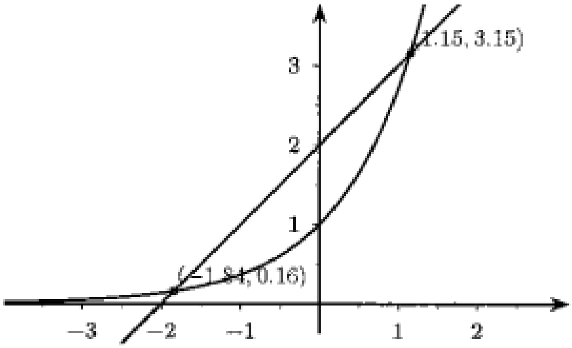
Rollen lause

Kuva 34: Turun 12. kielentämistehtävä

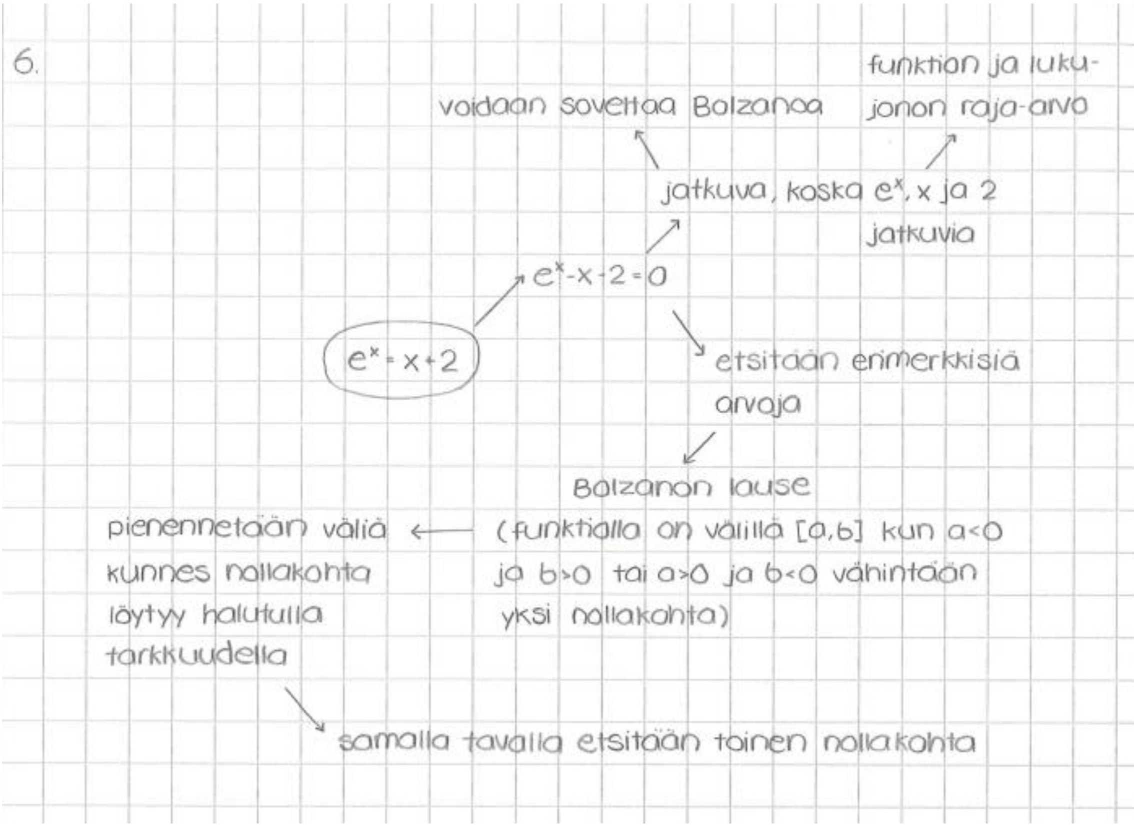
LIITE 18

Tehtävä 6. (Tämä tehtävä palautetaan kirjallisena. Vastauksia käytetään matematiikan opetuksen tutkimukseen.)

Yhtälön $e^x = x + 2$ juurten likiarvo voidaan ratkaista haarukoimalla. (Vastaus on $x \approx -1,84$ tai $x \approx 1,15$.) Mitä tietoja tarvitset että tämä haarukointi toimii? Valitse keskeisimmät käsitteet ja tulokset sekä piirrä niistä käsitekartta. Käsitekarttaa piirtäessäsi kiinnitä huomiota siihen että laitat tulokset oikeean järjestykseen.



KUVA 1. Funktion $x \mapsto e^x$ ja $x \mapsto x + 2$.



Kuva 35: Turun 13. kielentämistehtävä

LIITE 19

Kysely kielentämisestä

Nimi

Koulutusohjelma

Vastaa seuraaviin väittämiin laittamalla rasti sopivaan ruutuun.

0=täysin eri mieltä
1=jokseenkin eri mieltä
2=jokseenkin samaa mieltä
3=täysin samaa mieltä

Väittämä	**0**	**1**	**2**	**3**
Olen hyvä matematiikassa.				
Koen onnistuvani laskiessani matematiikan harjoituksia.				
Osaan ratkaista vaikeitakin matematiikan tehtäviä.				
Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin muille.				
Pidän sanallisista tehtävistä.				
Sanalliset tehtävät ovat mielestäni hyödyllisiä.				
Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.				
Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.				
Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.				
Kirjoittaminen sanallisesti auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin.				

Matematiikassa vaikeinta on kirjoittaa ajatukset matemaattisessa muodossa.				
Kun ratkaisen matematiikan tehtävää, teen ajatustyön päässäni enkä kirjoita paperille kuin välttämättömän.				
Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.				
Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.				
Olen valmis käyttämään pitkänkin aikaa matematiikan tehtävän ratkaisuun.				
Opettajan on helpompi arvioida sellaista tehtävää, jossa on käytetty luonnollista kieltä ja kommentointia. Tällaisesta ratkaisusta näkee, onko laskija ymmärtänyt aiheen.				

Avoin kysymys: Kerro vapaasti miten suhtaudut epämuodollisen luonnollisen kielen käyttöön matematiikan tehtävien ratkaisuissa? Miten voisit itse hyödyntää sitä omissa ratkaisuissasi?

____
____
____
____
____
____
____
____

Avoin kysymys: Kerro vapaasti mitä sait irti kurssin aikana ratkaisemistasi kielentämistehtävistä?

LIITE 20

Matlabilla laskettu korrelaatiokerroin- sekä p-arvomatriisi kysymysten 1-16 välille.

r =

1.0000															
0.9667	1.0000														
0.9765	0.8888	1.0000													
0.1677	-0.0872	0.3742	1.0000												
0.9130	0.7807	0.9776	0.5545	1.0000											
0.7095	0.8432	0.5615	-0.4280	0.4337	1.0000										
0.9450	0.9953	0.8543	-0.1420	0.7419	0.8910	1.0000									
0.8555	0.9451	0.7367	-0.2709	0.6182	0.9716	0.9723	1.0000								
0.8086	0.6462	0.9045	0.6900	0.9719	0.3369	0.6132	0.5078	1.0000							
0.8058	0.9178	0.6707	-0.3578	0.5407	0.9870	0.9514	0.9955	0.4253	1.0000						
0.6750	0.4882	0.7985	0.7931	0.9041	0.2102	0.4586	0.3669	0.9790	0.2823	1.0000					
0.6124	0.4023	0.7585	0.8661	0.8787	0.0741	0.3615	0.2467	0.9582	0.1569	0.9892	1.0000				
0.8772	0.7886	0.9079	0.4362	0.9306	0.6249	0.7845	0.7422	0.9400	0.6809	0.8940	0.8248	1.0000			
0.3651	0.5452	0.1963	-0.5885	0.0829	0.9104	0.6236	0.7882	0.0385	0.8324	-0.0356	-0.1819	0.3771	1.0000		
0.9127	0.9692	0.8188	-0.1436	0.7183	0.9346	0.9869	0.9909	0.6167	0.9736	0.4810	0.3700	0.8175	0.7133	1.0000	
0.8319	0.9316	0.7059	-0.3085	0.5832	0.9807	0.9624	0.9990	0.4723	0.9986	0.3316	0.2083	0.7176	0.8126	0.9841	1.0000

p =

1.0000										
0.0333	1.0000									
0.0235	0.1112	1.0000								
0.8323	0.9128	0.6258	1.0000							
0.0870	0.2193	0.0224	0.4455	1.0000						
0.2905	0.1568	0.4385	0.5720	0.5663	1.0000					
0.0550	0.0047	0.1457	0.8580	0.2581	0.1090	1.0000				
0.1445	0.0549	0.2633	0.7291	0.3818	0.0284	0.0277	1.0000			
0.1914	0.3538	0.0955	0.3100	0.0281	0.6631	0.3868	0.4922	1.0000		
0.1942	0.0822	0.3293	0.6422	0.4593	0.0130	0.0486	0.0045	0.5747	1.0000	
0.3250	0.5118	0.2015	0.2069	0.0959	0.7898	0.5414	0.6331	0.0210	0.7177	1.0000

0.3876	0.5977	0.2415	0.1339	0.1213	0.9259	0.6385	0.7533	0.0418	0.8431	0.0108	1.0000					
0.1228	0.2114	0.0921	0.5638	0.0694	0.3751	0.2155	0.2578	0.0600	0.3191	0.1060	0.1752	1.0000				
0.6349	0.4548	0.8037	0.4115	0.9171	0.0896	0.3764	0.2118	0.9615	0.1676	0.9644	0.8181	0.6229	1.0000			
0.0873	0.0308	0.1812	0.8564	0.2817	0.0654	0.0131	0.0091	0.3833	0.0264	0.5190	0.6300	0.1825	0.2867	1.0000		
0.1681	0.0684	0.2941	0.6915	0.4168	0.0193	0.0376	0.0010	0.5277	0.0014	0.6684	0.7917	0.2824	0.1874	0.0159	1.0000	